数学序論問題解説 #11

河野

演習問題 4.11

(1)　a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。
(2)　a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

命題 4.16 を用いる方法と，用いず定義から直接求める方法の 2 つを紹介しておく。最初は用いる方法。

(1)　$X = c^{b\log_c a}$ とき，c を底とする対数をとると

$$\log_c X = \log_c c^{b\log_c a} = b\log_c a \log_c c = b\log_c a = \log_c a^b$$

が成立する。log は単射なので $\log_c X = \log_c a^b$ なら $X = a^b$ が，即ち $a^b = c^{b\log_c a}$ が成立する。

(2)　$X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ である。$Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ である。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立するが，log は単射なので $X = Y$ が成立する。

命題 4.16 を用いず定義から求める。対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

(1)　$Y = \log_c a$ とおくと $a = c^Y$ が成立する。即ち $a = c^{\log_c a}$ が成立する。両辺を b 乗すると $a^b = c^{b\log_c a}$ が得られる。

(2)　$X = \log_c a$ とおくと $a = c^X$ が成立し，$Y = \log_c b$ とおくと $b = c^Y$ が成立する。

$$a^{\log_c b} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_c b} = c^{\log_c a \log_c b}$$
$$b^{\log_c a} = \left(c^{\log_c b}\right)^{\log_c a} = c^{\log_c b \log_c a}$$

よって $a^{log_c b} = b^{\log_c a}$ が成立する。

演習問題 4.12

(1)　次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　次の式を証明せよ。

(1) $\arccos\dfrac{4}{5} = \arcsin\dfrac{3}{5}$

(2) $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} = \arcsin\dfrac{56}{65}$

(3) $\arccos\dfrac{24}{25} + \arccos\dfrac{12}{13} = \arcsin\dfrac{204}{325}$

(4) $4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

(3) 次の式を簡単にせよ。

(1) $\arctan 2+\arctan 3$

(2) $\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{12}{13}$

(4) 方程式 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5) $-1\leqq x\leqq 1$ の時，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $x>0$ の時，$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(7) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$\begin{aligned}
y=\arcsin x &\iff x=\sin y & \left(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)\\
y=\arccos x &\iff x=\cos y & (0\leq y\leq\pi)\\
y=\arctan x &\iff x=\tan y & \left(-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

逆三角関数の問題を考えるときには値の範囲のチェックが必要である。y の範囲が分からないときには，$x=\sin y$ から $y=\arcsin x$ は**導かれない**。

(1) $x=\arcsin\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}=\sin x\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ で $\sin x=\dfrac{1}{2}$ となる x を求めると $x=\dfrac{\pi}{6}$ である。よって $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

$x=\arccos\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}=\cos x\quad(0\leq x\leq\pi)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x=\arctan 1$ とおくと

$$1=\tan x\quad\left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin x\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arctan\sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$，即ち $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{6}$，即ち $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ となる。

(2)

(1)　$\arccos\frac{4}{5} = \alpha$ とおくと

$$\arccos\frac{4}{5} = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4}{5} \ \ (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

である。ここで $\cos\alpha \geq 0$ より $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ が成立する。

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

となるが $\sin\alpha \geq 0$ より $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ となる。ここからいきなり $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$ としないように !! α の範囲のチェックを必ずすること。 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$ となる。よって

$$\arccos\frac{4}{5} = \alpha = \arcsin\frac{3}{5}$$

となる。

(2)　$\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。$\beta = \arcsin\frac{5}{13}$ とおくと

$$\sin\beta = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。ここで $\frac{3}{5}, \frac{5}{13}$ は共に正であり，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ より小さいので

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

が成立していることを注意しておく。このとき $\cos\alpha, \cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$$

が成立する。ここからいきなり $\alpha+\beta=\arcsin\dfrac{56}{65}$ としないように !! $\alpha+\beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 最初の注意より $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha+\beta=\arcsin\dfrac{56}{65}$ 即ち

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$$

が成立する。

(3) $\alpha=\arccos\dfrac{24}{25}$, $\beta=\arccos\dfrac{12}{13}$ とおくと

$$\cos\alpha=\frac{24}{25}\ (0\le\alpha\le\pi),\qquad \cos\beta=\frac{12}{13}\ (0\le\beta\le\pi)$$

が成立している。$\cos\alpha\ge0,\cos\beta\ge0$ より $\alpha\le\dfrac{\pi}{2},\beta\le\dfrac{\pi}{2}$ である。よって $\sin\alpha\ge0,\sin\beta\ge0$ が成立している。

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{24}{25}\right)^2=\left(\frac{7}{25}\right)^2$$
$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より $\sin\alpha=\dfrac{7}{25},\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ である。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{7}{25}\frac{12}{13}+\frac{24}{25}\frac{5}{13}\\&=\frac{204}{325}\end{aligned}$$

ここからいきなり $\alpha+\beta=\arcsin\dfrac{204}{325}$ としないように !! $\alpha+\beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 $0\le\alpha+\beta\le\pi$ となるが

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{24}{25}\frac{12}{13}-\frac{7}{25}\frac{5}{13}\\&=\frac{253}{325}\ge0\end{aligned}$$

より $\alpha+\beta\le\dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\alpha+\beta=\arcsin\frac{204}{325}$$

である。

(4) $\alpha=\arctan\dfrac{1}{5}$ とおくと $\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$ $(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ であるが, $0<\tan\alpha<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ である。

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12}\ \ (0<2\alpha<\frac{\pi}{2})$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \ (0 < 4\alpha < \pi)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \ (-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4})$$

ここからいきなり $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$ としないように !! $4\alpha - \frac{\pi}{4}$ の範囲のチェックを必ずすること。

ここで $0 < \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ より $4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

となり式が得られる。

(3)

(1) $\arctan 2 = \alpha, \arctan 3 = \beta$ とおくと

$$\tan\alpha = 2 \ (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}), \quad \tan\beta = 3 \ (-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2})$$

である。$\tan\alpha > 0, \tan\beta > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ である。また $\alpha + \beta < \pi$ である。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

と $0 < \alpha + \beta < \pi$ より $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ となるので

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

(2) $\arcsin\frac{5}{13} = \alpha, \arcsin\frac{12}{13} = \beta$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \ (-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}), \qquad \sin\beta = \frac{12}{13} \ (-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$$

$\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0$ より $0 < \alpha, 0 < \beta$ である。また $\alpha + \beta \leq \pi$ である。

$$\cos\alpha^2 = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\cos\beta^2 = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

と $\cos\alpha \geq 0, \cos\beta \geq 0$ より $\cos\alpha = \frac{12}{13}, \cos\beta = \frac{5}{13}$ である。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{5}{13}\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\frac{12}{13} = 1$$

となるが $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ より $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

(4)　$y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (0 \leq y \leq \pi)$$

である。また $y = \arctan x$ より

$$\tan y = x$$

なので,

$$\sin y = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に代入すると $1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2}{5}$ より $x^2 = 4$ を得る。

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

より $x > 0$ なので $x = 2$ が解である。

(5)　$u = \arcsin x$ とおくと $x = \sin u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arccos x$ とおくと $x = \cos v$ $(0 \leq v \leq \pi)$ である。演習問題 4.4 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -\big(-\cos v\big) = \cos v$$

の成立が示される。$0 \leq v \leq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} - v \leq \dfrac{\pi}{2}$ であり,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$$

なので $\dfrac{\pi}{2} - v = u$ となり，$u + v = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(6)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x > 0$ より $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。$v = \arctan \dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 4.4 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。u, v ともに $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \dfrac{\pi}{2} - v < \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(7)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。