数学序論問題解説 #13

河野

演習問題 5.13　$x=a$ で微分可能な関数は $x=a$ において連続であることを証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとすると,

$$\varepsilon(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$$

とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。このとき

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h$$

なので $x=a+h$ とおくと

$$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{h\to 0}f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h\}=f(a)$$

となるので $f(x)$ は $x=a$ で連続である。

演習問題 5.14　定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^3$
(3) $f(x)=x^2+x+1$　　(4) $f(x)=a$
(5) $f(x)=x^4$　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{3x^2+3xh+h^2\right\}=3x^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{2x+h+1\right\}=2x+1\end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(5)

$$
\begin{aligned}
(x^4)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\right\} \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

演習問題 ***5.15**　　定理 5.14, 5.15 を証明せよ。

最初に定理 5.14 の証明。次が成立することを注意しておく：「ある $q(x)$ と $\varepsilon(x)$ に対し

$$f(x+h)-f(x) = q(x)h+\varepsilon(h)h$$

が成立するとき，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立すれば $f(x)$ は微分可能であり，$f'(x)=q(x)$ が成立する。逆に $f(x)$ が微分可能のとき $\varepsilon(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ とおくと，

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)h+\varepsilon(h)h$$

であり，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立する。」

$y=f(x), z=g(y)$ は微分可能なので

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= f'(x)h+\varepsilon_1(h)h \\
g(y+k)-g(y) &= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k
\end{aligned}
$$

としたとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$，$\lim_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0$ が成立している。$f(x+h)-f(x)=k$ とおくと $\lim_{h\to 0}k=0$ である。

$$
\begin{aligned}
g\circ f(x+h)-g\circ f(x) &= g(f(x+h))-g(f(x)) \\
&= g(f(x)+k)-g(f(x)) \\
&= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k \\
&= g'(y)\big(f(x+h)-f(x)\big)+\varepsilon_2(k)\big(f(x+h)-f(x)\big) \\
&= g'(y)\big(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\big)+\varepsilon_2(k)\big(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\big) \\
&= g'(y)f'(x)h+\Big(g'(y)\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)f'(x)+\varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)\Big)h
\end{aligned}
$$

$\varepsilon(h) = g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$ とおくと

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(y)f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となり，$h \to 0$ のとき $\lim_{h\to 0} k = 0$，$\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$，$\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(k) = 0$ となるので

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

となる。最初の注意より $g \circ f(x)$ は微分可能で，導関数は $g'(y)f'(x)$ となる。よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

次に定理 5.15 を証明する。関数 f と f の逆関数 f^{-1} を合成した関数は恒等写像である。即ち $f^{-1} \circ f(x) = x$ となる。$\dfrac{dx}{dx} = 1$ なので，定理 5.14 を適用すると，

$$1 = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

を得る。

演習問題 5.16　任意の自然数 n に対して $\big(x^n\big)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n = 1$ のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$$

よって $n = 1$ のとき成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\ &= kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^{k+1-1}\end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての n で成立する。

演習問題 5.17　次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$　　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = (x-1)'\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x-1)\left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+1} + (x-1)\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2)　(1) と同様に解いてもよいし，$y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$ と変形して

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

演習問題 5.18　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$

(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \sqrt{x^2+1}$

(4) $y = \cos 2x$

(5) $y = 2^{x^2}$

(6) $y = \log x$

(7) $y = \sin(x^2)$

(8) $y = \log_a x$

(9) $y = \arctan(x^2)$

(10) $y = \arcsin(1-x)$

(1)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right) - \left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{(x+h+1)(x^2+1)-(x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(-x^2-2x+1-xh-h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x+1-xh-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\left(\cos 2x\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos 2x\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\frac{\sin 2h}{h}\right\}\\
&= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\frac{\cos 2h-1}{h}=\frac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$$

なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}\\
&= -\lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\
&= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\
&= -2\cdot 1\cdot 0=0
\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}=2\cdot 1=2$$

なので

$$\left(\cos 2x\right)'=-2\sin 2x$$

となる。

(5)　$2=e^k$ とおくと $\log 2=\log e^k=k$ である。

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{2^{(x+h)^2}-2^{x^2}}{h}=\frac{\left(e^k\right)^{(x+h)^2}-\left(e^k\right)^{x^2}}{h}=\frac{e^{kx^2+2kxh+kh^2}-e^{kx^2}}{h}\\
&= \frac{e^{kx^2}\left(e^{kh(2x+h)}-1\right)}{h}=\frac{e^{kx^2}\left(e^{kh(2x+h)}-1\right)}{kh(2x+h)}k(2x+h)
\end{aligned}$$

ここで $H = kh(2x+h)$ とおくと，$h \to 0$ のとき $H \to 0$ であり，

$$\Delta = \frac{e^H - 1}{H} e^{kx^2} k(2x+h)$$

である。よって

$$\begin{aligned}\left(2^{x^2}\right)' &= \lim_{h\to 0} \Delta = \lim_{h\to 0} \frac{e^H - 1}{H} e^{kx^2} k(2x+h) = e^{kx^2} k(2x) \\ &= 2x \log 2 \left(e^k\right)^{x^2} = 2x \log 2 \cdot 2^{x^2}\end{aligned}$$

(6)

$$\left(\log x\right)' \quad = \quad \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが，ここで $k = \log(x+h) - \log x$ とおくと $h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる。

$$\log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

なので $\log \dfrac{x+h}{x} = k$ より $e^k = \dfrac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\left(\log x\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

(7)　$f(x) = \sin(x^2)$ とする。$u = 2xh + h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{h} = \frac{\sin(x^2 + 2hx + h^2) - \sin(x^2)}{h} \\ &= \frac{\sin(x^2+u) - \sin(x^2)}{h} = \frac{\sin(x^2+u) - \sin(x^2)}{u} \frac{u}{h}\end{aligned}$$

$h \to 0$ のとき $u \to 0$ であり

$$\lim_{h\to 0} \frac{u}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} \frac{\sin(x^2+u) - \sin(x^2)}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(x^2)\cos u + \cos(x^2)\sin u - \sin(x^2)}{u} \\ &= \sin(x^2) \lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u} + \cos(x^2) \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

ここで (4) で示した $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$ を用いると

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos(x^2) \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \lim_{h\to 0} \frac{u}{h} = 2x\cos(x^2)$$

(8)　$f(x)=\log_a x$ とする。$y=\log_a x$ より $x=a^y$ である。$k=\log_a(x+h)-\log_a x$ とおくと

$$x+h=a^{\log_a(x+h)}=a^{\log_a x+k}=a^{\log_a x}a^k=xa^k$$

より

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{h}=\frac{k}{xa^k-x}=\frac{1}{x}\frac{k}{a^k-1}$$

$b=\log a$ とおくと $a=e^b$ より

$$\lim_{k\to 0}\frac{k}{a^k-1}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{(e^b)^k-1}=\lim_{k\to 0}\frac{bk}{e^{bk}-1}\frac{1}{b}=\frac{1}{b}=\frac{1}{\log a}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x\log a}$$

(9)　$f(x)=\arctan(x^2)$ とする。$u=2xh+h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{\arctan(x+h)^2-\arctan(x^2)}{h}=\frac{\arctan(x^2+2hx+h^2)-\arctan(x^2)}{h}\\&=\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{h}=\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{u}\frac{u}{h}\end{aligned}$$

$y=\arctan(x^2)$，$k=\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)$ とおくと $x^2=\tan y$，$x^2+u=\tan(y+k)$ である。

$$\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{u}=\frac{y+k-y}{u}=\frac{k}{x^2+u-x^2}=\frac{k}{\tan(y+k)-\tan y}$$

$h\to 0$ のとき $k\to 0$ であり，$\lim_{h\to 0}\frac{u}{h}=2x$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{\tan(y+k)-\tan y}{k}&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)}-\frac{\sin y}{\cos y}\right)=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\frac{\sin(y+k)\cos y-\sin y\cos(y+k)}{\cos(y+k)\cos y}\\&=\lim_{k\to 0}\frac{\sin(y+k)\cos y-\sin y\cos y+\sin y\cos y-\sin y\cos(y+k)}{k\cos(y+k)\cos y}\\&=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\cos(y+k)\cos y}\left(\cos y\frac{\sin(y+k)-\sin y}{k}-\sin y\frac{\cos(y+k)-\cos y}{k}\right)\\&=\frac{\cos y(\sin y)'-\sin y(\cos y)'}{\cos^2 y}=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^4\end{aligned}$$

計算途中で $\sin y,\cos y$ の定義に基づく微分の結果を使用した。

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2x}{1+x^4}$$

(10) $\arcsin(1-x)=y$ とおくと $1-x=\sin y$ となり，$\arcsin(1-(x+h))=y+k$ とおくと $1-(x+h)=\sin(y+k)$ となる。またこのとき $h=\sin y-\sin(y+k)$ となる。

$$\begin{aligned}\Delta&=\frac{\arcsin(1-(x+h))-\arcsin(1-x)}{h}=\frac{k}{\sin y-\sin(y+k)}\\&=\frac{k}{-2\cos\left(\frac{y+k+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y+k-y}{2}\right)}=\frac{k}{-2\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\frac{k}{2}\right)}\end{aligned}$$

$h \to 0$ のとき $k \to 0$ なので

$$(\arcsin(1-x))' = \lim_{h\to 0} \Delta = \lim_{h\to 0} \frac{k}{-2\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= -\lim \frac{1}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)} \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k}{2}}{\sin\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\cos y}$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2}$$

よって

$$(\arcsin(1-x))' = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

演習問題 5.19　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y = x^2 + 3x + 2$
(2) $y = 3\sin x + 2e^x$
(3) $y = xe^x$
(4) $y = \sin^{100} 2x$
(5) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$
(6) $y = \arcsin(x^2 + 1)$
(7) $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$
(8) $y = \sin(3x + 1)$
(9) $y = e^x \sin x$
(10) $y = x \arctan x$

(1)

$$\left(x^2+3x+2\right)' \quad = \quad 2x+3$$

(2)

$$\left(3\sin x + 2e^x\right)' \quad = \quad 3\cos x + 2e^x$$

(3)

$$\left(xe^x\right)' \quad = \quad e^x + xe^x$$

(4)

$$\left(\sin^{100} 2x\right)' \quad = \quad 200\sin^{99} 2x \cdot \cos 2x$$

(5)

$$\left(x^3 \log(2x^3+x)\right)' \quad = \quad 3x^2 \log(2x^3+x) + x^3 \frac{6x^2+1}{2x^3+x}$$

(6)

$$\left(\arcsin(x^2+1)\right)' \quad = \quad \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$$

(7)

$$\begin{aligned}\big((x^2+2)(x^2+3)\big)' &= (x^2+2)'(x^2+3)+(x^2+2)(x^2+3)' \\ &= 2x(x^2+3)+2x(x^2+2)=2x(2x^2+5)\end{aligned}$$

(8)

$$\big(\sin(3x+1)\big)' = 3\cos(3x+1)$$

(9)

$$\big(e^x\sin x\big)' = e^x\sin x+e^x\cos x$$

(10)

$$\begin{aligned}(x\arctan x)' &= (x)'\arctan x + x\,(\arctan x)' \\ &= \arctan x+\frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

演習問題 5.20　次を示せ。

$$y=\log|x|\ (x\neq 0)\ \text{とおくと}\ y'=\frac{1}{x}$$

$x>0$ のときはすでに示したように

$$\big(\log x\big)'=\frac{1}{x}$$

が成立する。

$x<0$ のとき，$|x|=-x$ なので，$u=-x$ とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned}\big(\log|x|\big)' &= \frac{d\log(-x)}{dx}=\frac{d\log u}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u}(-1)=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

いずれの場合も

$$\big(\log|x|\big)'=\frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.21　次を示せ。

$$\left\{x\arctan x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right\}'=\arctan x$$

$$
\begin{aligned}
\left(x\arctan x\right)' &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\
\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)' &= \frac{x}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

から命題が示される。

演習問題 5.22　対数微分法を用いて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$

(1)　$y = x^{\sin x}$ の両辺の対数を取ると，$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ である。この両辺を x で微分すると

$$
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}
$$

なので

$$
\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}\right)
$$

が得られる。

(2)　$y = \sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$ の両辺の対数を取ると，

$$
\begin{aligned}
\log y &= \log\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}} = \log\left(\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{2}\left\{\log(x^2+2)^2 - \log(x^2+3)^3\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\log(x^2+2) - \frac{1}{2}\cdot 3\log(x^2+3) = \log(x^2+2) - \frac{3}{2}\log(x^2+3)
\end{aligned}
$$

である。この両辺を x で微分すると

$$
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}\left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}\right) \\
&= \frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} - \frac{3x(x^2+2)}{(x^2+3)^2\sqrt{x^2+3}}
\end{aligned}
$$

が得られる。