

演習問題 5.23

- (1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。(1, 3) における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。
 (2) 原点を通る直線が $y = f(x) = x^2 + x + 1$ に接している。このときこの直線の方程式を求めよ。
 (3) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し, $y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ。
 (4) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で, 線分 PQ に平行となるのは, どの点における接線か? その点の x 座標の値を求めよ。

- (1) $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。 $f'(x) = 2x + 1$ なので $f'(1) = 3$ である。 $f(1) = 3$ なので接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 3 = 3x$$

である。法線は接線と直交するので法線の傾きは $-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}$ である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) + f(1) \\ &= -\frac{1}{3}(x - 1) + 3 \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

- (2) $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。今 $f'(x) = 2x + 1$ なので方程式は

$$y = (2a + 1)(x - a) + a^2 + a + 1 = (2a + 1)x - a^2 + 1$$

となる。この直線が原点を通るので $0 = -a^2 + 1$ より, $a = \pm 1$ となる。よって求める接線は $y = 3x$ および $y = -x$ である。

- (3) $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。この接線が $y = 2x + 1$ と平行のとき $f'(a) = 2$ が成立している。 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ なので $f'(a) = 3a^2 - 6a + 2 = 2$ となる。これを解いて $a = 0, 2$ を得る。 $f(0) = 0, f(2) = 0$ なので $a = 0$ のとき接線の方程式は

$$y = 2x$$

$a = 2$ のときの接線の方程式は

$$y = 2x - 4$$

となる。

(4) 線分 PQ の傾きは

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2 + x_1) + b\end{aligned}$$

となる。

$$f'(x) = 2ax + b$$

なので接線が線分 PQ と平行となるような点の x 座標は $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$ である。接点の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, a \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + b \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + c \right)$$

である。

演習問題 5.24 命題 5.19 を証明せよ。ただし (2) の証明には平均値の定理と呼ばれる次の定理を用いてよい。 f が (a, b) で微分可能であり, $[a, b]$ で連続のとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる c ($a < c < b$) が存在する。

(1) c が関数 $y = f(x)$ の極大点とする。ある正数 δ が存在して $0 < |x - c| < \delta$ を満たす任意の x に対し $f(x) < f(c)$ が成立する。 c に十分近い x に対しては $f(x) - f(c) < 0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h > 0$ に対しては

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h < 0$ に対しては

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$

および $f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$ が存在して, $f'_+(c) = f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0 \leq f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

より

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

となる。よって c は臨界点である。

c が関数 $y = f(x)$ の極小点とする。ある正数 δ が存在して $0 < |x - c| < \delta$ を満たす任意の x に対し $f(x) > f(c)$ が成立する。 c に十分近い x に対しては $f(x) - f(c) > 0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h > 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h < 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

および $f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在して、 $f'_+(c) = f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0 \leq f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

より

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

となる。よって c は臨界点である。

(2) (a, b) で $f'(x) > 0$ が成立しているとする。 x_1, x_2 を $[a, b]$ の $x_1 < x_2$ を満たす任意の元とする。平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (x_1 < c < x_2)$$

を満たす c が存在する。このとき $f'(c) > 0$ であり $x_1 < x_2$ なので $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ となる。よって f は増加の状態にある。

(a, b) で $f'(x) < 0$ が成立しているとする。 x_1, x_2 を $[a, b]$ の $x_1 < x_2$ を満たす任意の元とする。平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (x_1 < c < x_2)$$

を満たす c が存在する。このとき $f'(c) < 0$ であり $x_1 < x_2$ なので $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$ となる。よって f は減少の状態にある。

演習問題 5.25 以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2) $f(x) = xe^{-x}$

(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$

(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2 \cos x$

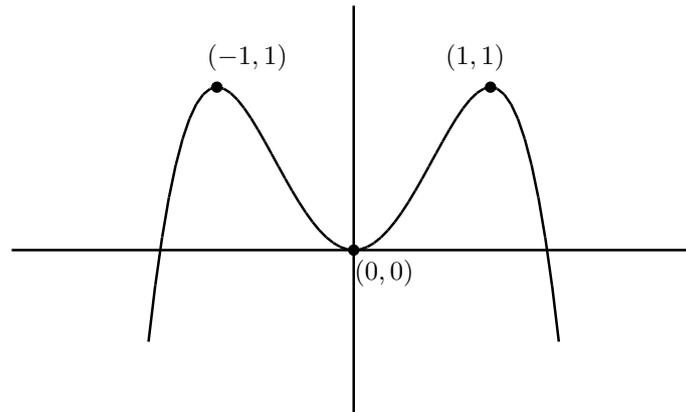
(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9) $f(x) = x^{-x^2}$

(1) $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗	1	↘

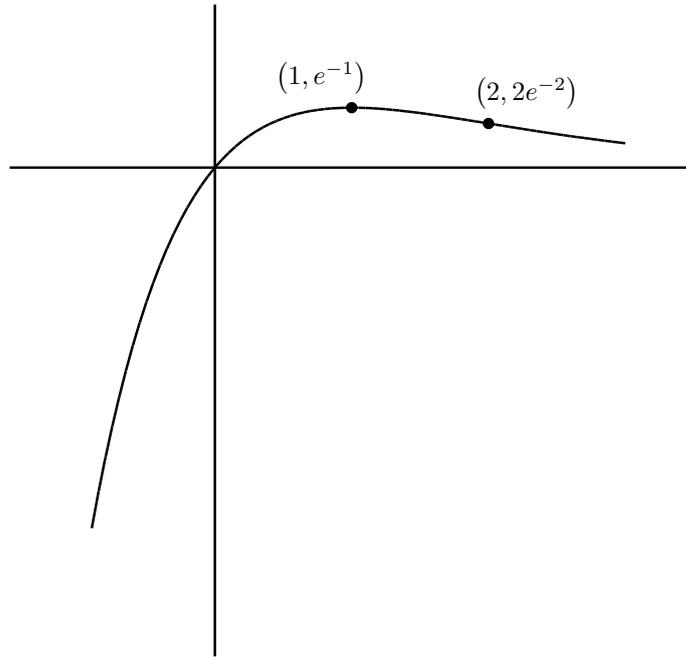
$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。
($x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。



(2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。増減表は次のようになる。

x		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



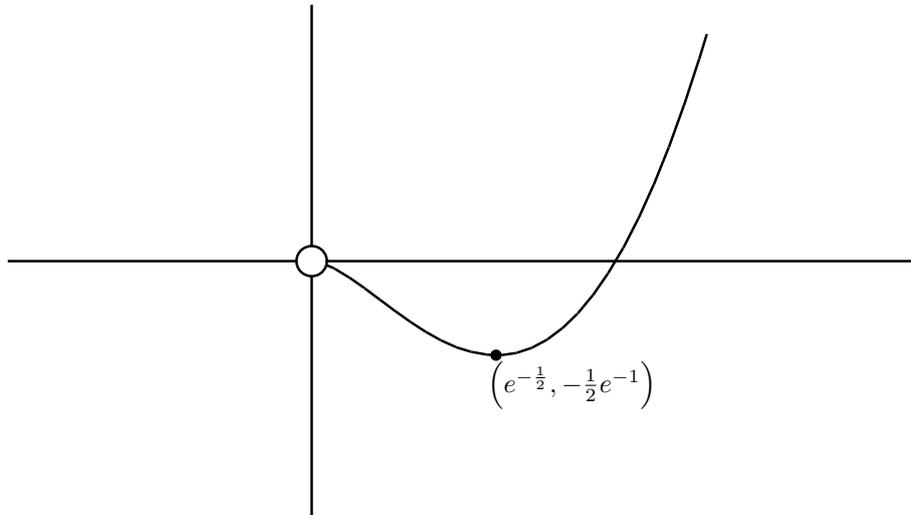
(3) $\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。 $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$ を解いて、 $x = \sqrt{\frac{1}{e}}$ を得る。 よって増減表は次の様になる。

x		$\sqrt{\frac{1}{e}}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$-\frac{1}{2e}$	\nearrow

$x \rightarrow +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{x}{x^3}} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0
 \end{aligned}$$

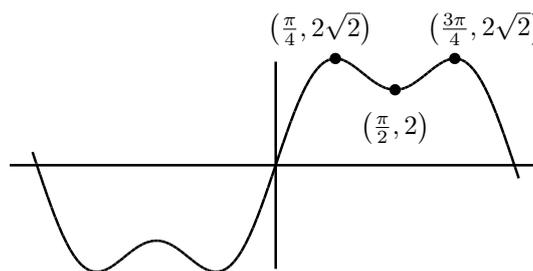
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり、また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4) $\sin x$ は周期 2π の周期関数であり, $\sin 3x$ は周期 $\frac{2\pi}{3}$ の周期関数である。これより $f(x)$ は周期 2π の周期関数になる。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフを描き, それを x 軸の方向へ $2n\pi$ (n は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3 \cos x + 3 \cos 3x = 3 \cos x + 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 6 \cos x(2 \cos^2 x - 1) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ なので, $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲では $x = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$ である。よって増減表は次のようになり, グラフは次図のようになる。

x		$-\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	\nearrow	-2	\searrow	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	\nearrow	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	\searrow	2	\nearrow	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	\searrow



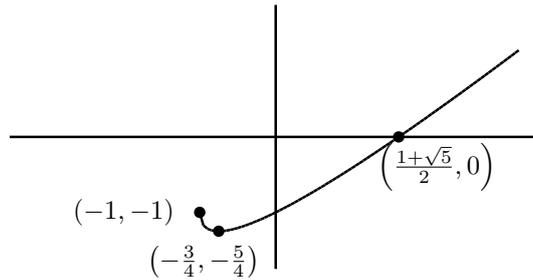
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geq 0$ で定義されている。 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より $x = -\frac{3}{4}$ となる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

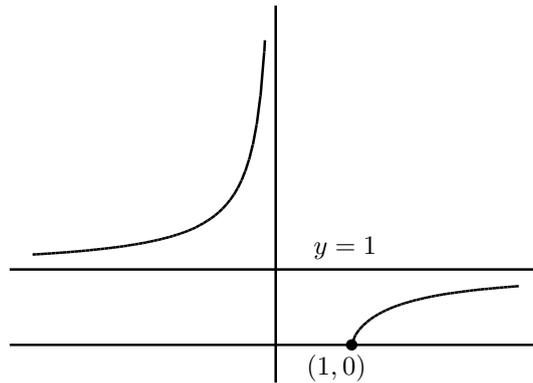
$$x^2 = 1 + x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geq 0$ より $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ が必要である。 $x \geq 0$ のときは $1 \geq \frac{1}{x}$ より $x \geq 1$ である。

$x < 0$ のときは常に $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ である。 $f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2}$ は $x = 1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x) > 0$ である。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。

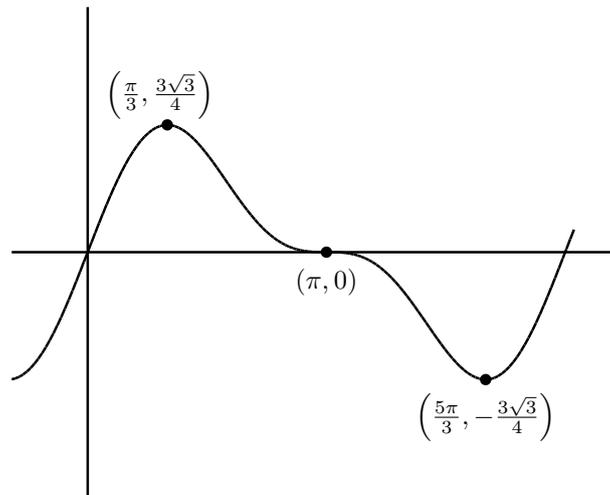
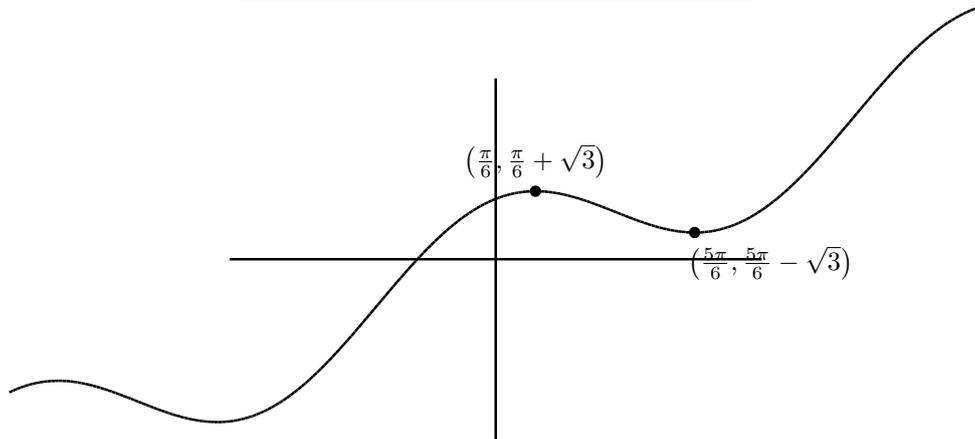


(7) $f(x) = x + 2 \cos x$ なので $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$ が成立する。 $0 \leq x \leq 2\pi$ でグラフを描いて、そのグラフを x 軸方向に $2n\pi$, y 軸方向に $2n\pi$ 移動したものが関数のグラフになる (ここで n は整数)。

$f(x) = x + 2 \cos x$ なので $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ である。 $f'(x) = 0$ となるのは $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ である。増

増減とグラフは次のようになる。

x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	



(8) $f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で考える。 $f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ とすると、 $\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ である。 $\cos x + 1 = 0$ のとき $x = -\pi, \pi$ である。 $2\cos x - 1 = 0$ のとき $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ である。増減表は次のようになるので、グラフは前図のようになる。

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

(9) $f(x) = x^{-x^2}$ なので定義域は $x > 0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。 $y = x^{-x^2}$ とすると $\log y = -x^2 \log x$ である。両辺を x で微分すると $\frac{1}{y} y' = -2x \log x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \log x - x$

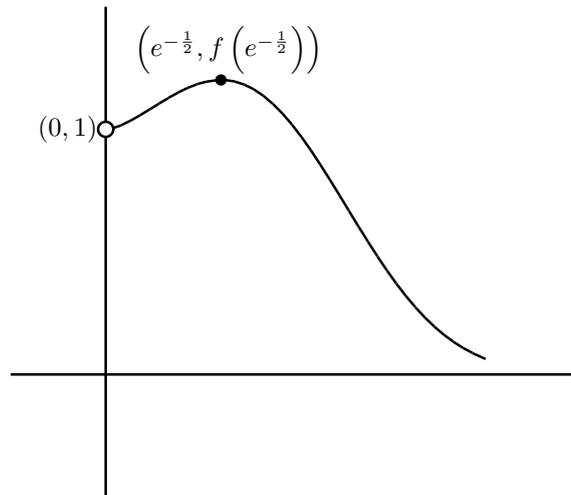
なので $y' = -x \cdot x^{-x^2} (2 \log x + 1)$ となる。 $f'(x) = 0$ とすると、 $2 \log x + 1 = 0$ なので $x = e^{-\frac{1}{2}}$ となる。増減表は

x		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	↘

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。また $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求める。 $\log y = -x^2 \log x$ の極限を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x^2 \log x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

なので、 $0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right)$ となる。よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



演習問題 5.26 $x_1, x_2 \in [a, b]$ に対し $F(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1) - f(x)$ とおき、 $F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.21 を証明せよ。

$f''(x) < 0$ の場合も同様にできるので、 $f''(x) > 0$ の場合のみ証明する。 $x_1 < x_2$ としても一般性を失わないので、この場合を考える。

$$F(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x_1 - x_1) + f(x_1) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_1) - f(x_1) = 0 \\
F(x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2) \\
&= f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = 0
\end{aligned}$$

が成立しているので, $F(x)$ の $[x_1, x_2]$ における最大値, または最小値を与える x_3 で $x_1 < x_3 < x_2$ となるものが存在する。このとき $x = x_3$ で $F'(x_3) = 0$ が成立している。 $F''(x) = -f''(x) < 0$ なので $F'(x)$ は $[x_1, x_2]$ で単調減少である。よって $F'(x)$ の $[x_1, x_2]$ における増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F''(x)$		-		-	
$F'(x)$		\searrow	0	\searrow	

よって (x_1, x_3) において $F'(x) > 0$, (x_3, x_2) において $F'(x) < 0$ である。よって $F(x)$ の増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$	0	\nearrow		\searrow	0

よって (x_1, x_2) において $F(x) > 0$ となるので

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) > f(x)$$

が成立し, 上に凸であることが示された。

演習問題 5.27 $f''(c) = 0$ であって $f'''(c) \neq 0$ ならば, 変曲点であることを証明せよ。

$f'''(c) \neq 0$ なので $f'''(c) > 0$ の場合と $f'''(c) < 0$ の場合に分ける。

(1) $f'''(c) > 0$ の場合: c を含む小区間 $[a, b]$ で $f'''(x) > 0$ としてよい。 $f''(x)$ は $[a, b]$ で単調増加なので, $a \leq x < c$ において $f''(x) < 0$ であり, $c < x \leq b$ で $f''(x) > 0$ である。命題 5.20 より $[a, c)$ において上に凸であり, $(c, b]$ において下に凸である。よって c は変曲点である。

(2) $f'''(c) < 0$ の場合: c を含む小区間 $[a, b]$ で $f'''(x) < 0$ としてよい。 $f''(x)$ は $[a, b]$ で単調減少なので, $a \leq x < c$ において $f''(x) > 0$ であり, $c < x \leq b$ で $f''(x) < 0$ である。命題 5.21 より $[a, c)$ において下に凸であり, $(c, b]$ において上に凸である。よって c は変曲点である。

演習問題 5.28 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| (1) $y = (x - 5)^4(x + 1)^3$ | (2) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ |
| (3) $y = e^{-x^2}$ | (4) $y = x \log x$ |

(1)

$$\begin{aligned}y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1) + 3(x-5)\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11)\end{aligned}$$

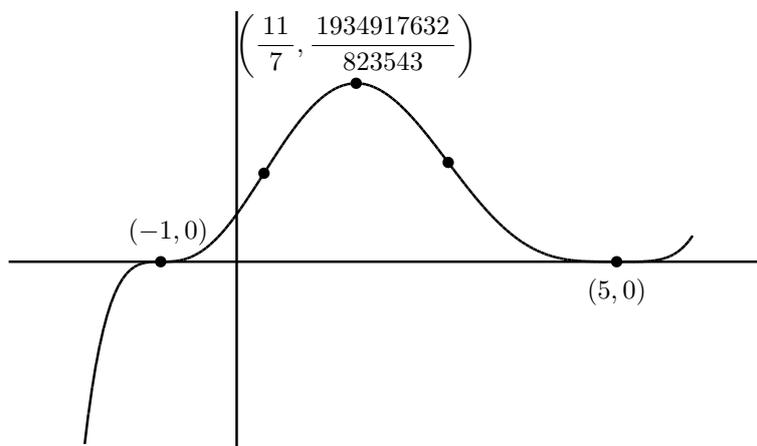
なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11}{7}$ を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2 - 22x + 7)$$

なので $y'' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11+6\sqrt{2}}{7}, \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次のようになる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	0	-	-	-	0	+	0	+
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y = 0$ を解いて $x = -1, 5$ である。 y 軸との交点は y に $x = 0$ を代入して $(-5)^4 = 5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



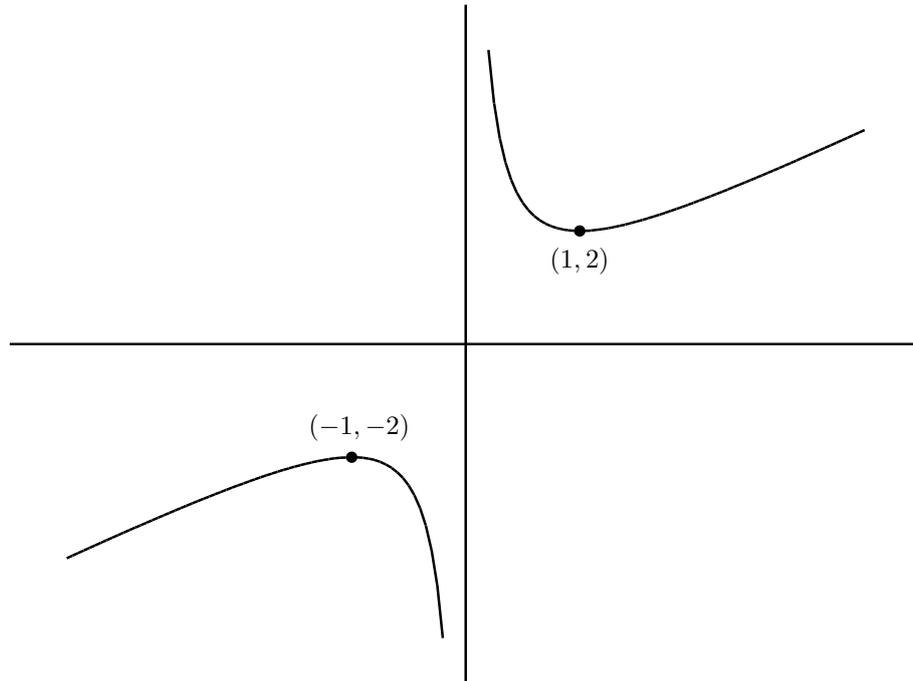
(2) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 1$ を得る。 $y'' = \frac{2}{x^3}$ なので増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
y'	+	0	-	×	-	0	+
y''	-	-	-	×	+	+	+
y	↗		↘	×	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次図のようになる。



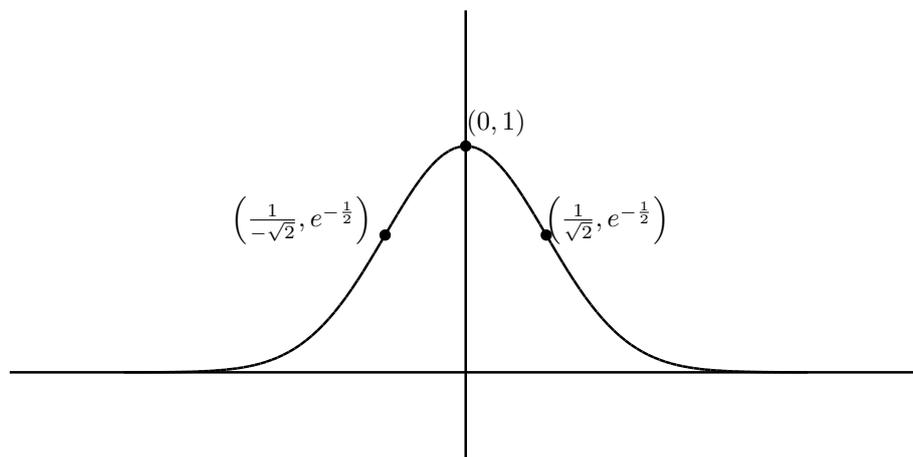
(3) $y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。 $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次のようになる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗		↘		↘		↗

グラフは x 軸とは交わらない。 y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次図のようになる。



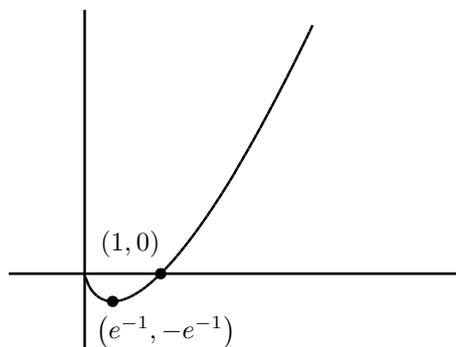
(4) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \frac{1}{e}$ を得る。 $y'' = \frac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	×	-	0	+
y''	×	+	+	+
y		↘		↗

x 軸との交点は $x = 1$ であり, y 軸とは交わらない。また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 5.29 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

- (1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$ (2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$
 (3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = t - 2t^4$ (4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

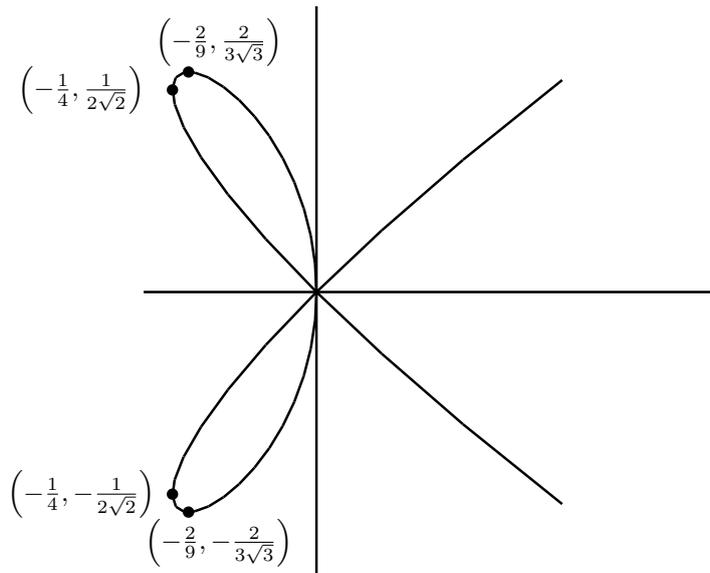
(1) $x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。 $y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために, 途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
x	←		→	→	→		←	←	←		→
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓		↑	↑	↑
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$,
 $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$
 $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$, $(x(-1), y(-1)) =$
 $(0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次のようになる。



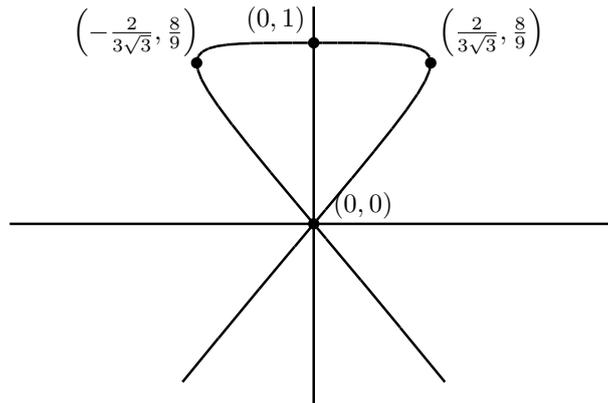
(2) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $y'(t) = -4t^3$ なので $y'(t) = 0$
 を解いて $t = 0$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は
 以下のようになる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$, $(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次のようになる。



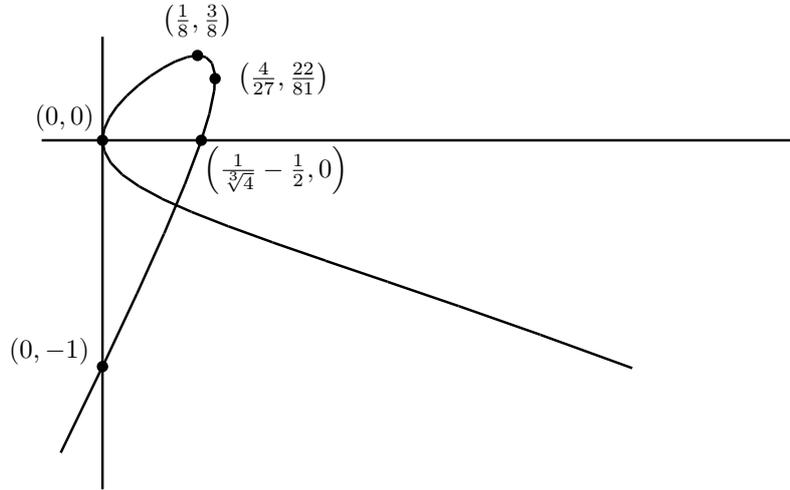
(3) $x'(t) = 2t - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \frac{2}{3}$ を得る。 $y'(t) = 1 - 8t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \frac{1}{2}$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下のようになる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$, $\left(x\left(\frac{2}{3}\right), y\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{27}, \frac{22}{81}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, -1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次のようになる。



(4) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $y'(t) = -2t - 4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下のようになる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (0, -1)$, $(x(-1), y(-1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, -1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ を得る。 x 軸との交点は $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, 0\right)$ である。概形なので $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ の値もおおよそ分かればよ

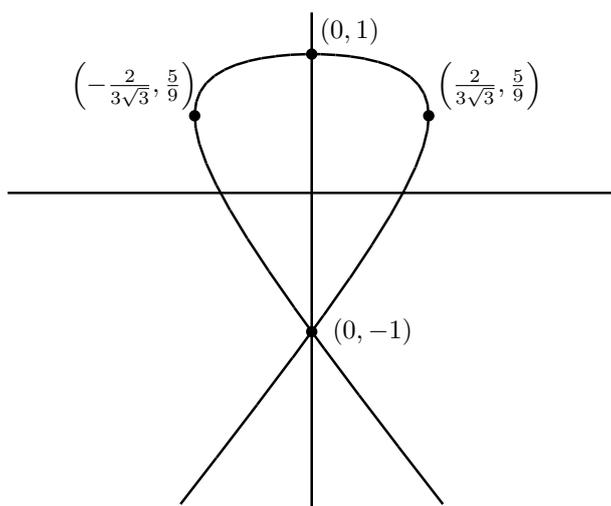
い。 $2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$ から $1 < -1 + \sqrt{5} < \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{3}{4}$ と変形して $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} <$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ を得る。同様に $\frac{1}{4} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ を得るので、

$$0.18 \doteq \frac{1}{4\sqrt{2}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0.43$$

が分かる。 $2.1 < \sqrt{5} < 2.3$ から始めると $0.2711 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 0.322$ ともう少し正確な値の範囲が分かるが、概形なのでここまで近似を良くしなくてもいいかもしれない。

以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



演習問題 5.30 以下の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$

(8) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(10) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

(11) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

(14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^{e^{2x}}$

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\log(1+x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)(e^x + e^{-x}) = 2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log \cos(\alpha x))'}{(\log \cos(\beta x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(\alpha x)} \cdot (-\sin(\alpha x)) \cdot \alpha}{\frac{1}{\cos(\beta x)} \cdot (-\sin(\beta x)) \cdot \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}\end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} (\log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x) = \log a - \log b$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{e^x} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4)'}{(e^x)'} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{e^x} \\ &= 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \\ &= 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(1+3^x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3^x} \log 3 \cdot 3^x \\ &= \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{1+3^x} = \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

(7)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

となるので (1) の結果を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

(9) $t = \frac{1}{x}$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ である。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \sin t = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(10) $y = x^x$ に対し $\log y = x \log x$ である。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log y = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

が成立している。ここで (8) の結果を用いた。 $\log x$ は単射であり、連続関数なので

$$\log 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log y = \log \left(\lim_{x \rightarrow +0} y \right)$$

より $\lim_{x \rightarrow +0} y = 1$ となる。

(11) $0 < a < b$ かつ $X > 0$ に対し $a^X < b^X$ が成立する。 x が 0 に近づくとき $x < \frac{1}{2}$ としてよ

い。 $0 < x < \frac{1}{2}$ かつ $\frac{1}{x} > 0$ なので $0 < x^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ となる。 $x \rightarrow +0$ のとき $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ なので

$0 \leq \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$ なので $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$ である。

(12) $y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ なので $\log y = \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$ となる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{a^x + b^x}{2}} \left(\frac{a^x \log a + b^x \log b}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \\ &= \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{ab} \end{aligned}$$

が成立する。 \log は連続なので $\log\left(\lim_{x \rightarrow 0} y\right) = \log\sqrt{ab}$ を得る。また \log は単射なので $\lim_{x \rightarrow 0} y = \sqrt{ab}$ となる。

即ち

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

となる。

(13) $y = \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ とおくと, $\log y = \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\tan x}{x} \right)$ である。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log\left(\frac{\tan x}{x} \right) \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \frac{x}{\tan x} \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin 2x)'}{(2x^2 \sin 2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)'}{(2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 2x + 4x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(\sin 2x + 4x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{3 \cos 2x - 6x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

より

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\log y) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \log y\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\right)$$

(14) $y = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^{e^{2x}}$ とおくと

$$\log y = e^{2x} \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = \frac{\log(e^x + e^{-x}) - \log(e^x - e^{-x})}{e^{-2x}}$$

である。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(e^x + e^{-x}) - \log(e^x - e^{-x}))'}{(e^{-2x})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}{-2e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - e^{-4x}} = 2 \end{aligned}$$

より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\log y) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \log y\right) = \exp(2) = e^2$$