

演習問題 6.1 次の定理は平均値の定理と呼ばれる。平均値の定理の成立を前提として命題 6.1 を証明せよ。

関数 f が $[a, b]$ で連続であり, (a, b) で微分可能であるとする。このときある実数 c で $a < c < b$ かつ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものが存在する。

最初に, $H(x)$ がある区間で恒等的に $H'(x) = 0$ ならば $H(x)$ は定数関数であることを示す。区間の中の実数 a を 1 つ固定する。今 $x > a$ となる区間中の任意の x を考える。 $[a, x]$ として平均値の定理を適用すると, ある c で $a < c < x$ かつ

$$H'(c) = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

を満たすものが存在する。 $H'(c) = 0$ なので $H(x) = H(a)$ が成立する。 $x < a$ となる区間中の任意の x を考える。 $[x, a]$ として平均値の定理を適用すると, ある c で $x < c < a$ かつ

$$H'(c) = \frac{H(a) - H(x)}{a - x}$$

を満たすものが存在する。 $H'(c) = 0$ なので $H(x) = H(a)$ が成立する。 $x = a$ のときは $H(x) = H(a)$ である。よって任意の x に対し $H(x) = H(a)$ が成立するので, $H(x)$ は定数関数である。

次に命題 6.1 を証明する。 $H(x) = G(x) - F(x)$ とおくと $H'(x) = G'(x) - F'(x)$ より $H'(x) = 0$ となる。よって $H(x)$ は定数関数である。これを $H(x) = C$ とおく。このとき $G(x) - F(x) = H(x) = C$ なので $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

演習問題 6.2 命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

命題 6.2 (1) はすでに示してあるので (2) を示す。 $F'(x) = f(x)$ とおくと $F(x) = \int f(x) dx$ である。 $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$ なので

$$\int af(x) dx = aF(x) = a \int f(x) dx$$

となる。

命題 6.3 は微分法で学んだ関数の導関数と積分の定義から出てくる。即ち

$$\int f(x) dx = F(x)$$

を示すためには

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

を示せばよい。

(1) は要綱に書いてある。(2) は演習問題 5.15 を参考にすると, $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ が成立することから従う。(3)–(8) はそれぞれ $(\sin x)' = \cos x$, $(-\cos x)' = \sin x$, $(e^x)' = e^x$, $\left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a} \log a a^x = a^x$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ から結論が得られる。

演習問題 6.3 次の関数の不定積分を求めよ。

- | | | | |
|---------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|
| (1) $(2x+5)^6$ | (2) e^{-2x} | (3) $\sin \frac{x}{2}$ | (4) $x(3x^2+1)^8$ |
| (5) $\frac{x}{(1+x^2)^3}$ | (6) xe^{3x} | (7) x^2e^{3x} | (8) $\tan x$ |
| (9) $x \sin x$ | (10) $x^2 \cos x$ | (11) $x^3 \log x$ | (12) $(\log x)^2$ |
| (13) $\arctan x$ | (14) $\arcsin x$ | (15) $e^x \sin x$ | (16) $e^x \cos x$ |

(1) 置換積分法を使う。 $t = 2x + 5$ と置くと $\frac{dt}{dx} = 2$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int (2x+5)^6 dx &= \int t^6 \frac{dx}{dt} dt = \int t^6 \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2 \cdot 7} t^7 = \frac{1}{14} (2x+5)^7\end{aligned}$$

(2) $t = -2x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -2$ より $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} dx &= \int e^t \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-2x}\end{aligned}$$

(3) $t = \frac{x}{2}$ とおくと, $x = 2t$ より $\frac{dx}{dt} = 2$ となる。よって

$$\int \sin \frac{x}{2} dx = \int \sin t \frac{dx}{dt} dt = -2 \cos t = -2 \cos \frac{x}{2}$$

となる。

(4) $t = 3x^2 + 1$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 6x$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{6x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+1)^8 dx &= \int xt^8 \frac{1}{6x} dt = \frac{1}{6} \int t^8 dt \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{9} t^9 = \frac{1}{54} (3x^2+1)^9\end{aligned}$$

(5) $t = 1 + x^2$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2x$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2t}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx &= \int \frac{x}{t^3} \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) t^{-2} = -\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

ここから部分積分法の問題がでてくる。部分積分法は

$$\int f'g dx = fg - \int f'g dx$$

というものであった。

(6) $g = x$, $f' = e^{3x}$ とおくと

$$f = \int f' dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int xe^{3x} dx &= \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} \right)' x dx = \int f'g dx \\ &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}x^{3x} dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\end{aligned}$$

(7) $g = x^2$, $f' = e^{3x}$ とおくと

$$f = \int f' dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x} dx &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int 2x \frac{1}{3}e^{3x} dx\end{aligned}$$

ここでもう一度部分積分を実行すると

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) e^{3x}$$

(8) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ なので $t = \cos x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より $dx = -\frac{1}{\sin x}dt$ と変形すると

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{-1}{\sin x} dt = -\int \frac{1}{t} dt = -\log |\cos x|$$

(9) $g = x$, $f' = \sin x$ とおくと $f = \int f' dx = \int \sin x dx = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x\end{aligned}$$

(10) $g = x^2$, $f' = \cos x$ とおくと $f = \int f' dx = \int \cos x dx = \sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx\end{aligned}$$

となる。部分積分をもう一度実行すると

$$\begin{aligned}&= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\end{aligned}$$

(11) $f' = x^3$, $g = \log x$ とおくと $f = \frac{1}{4}x^4$ なので

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(12) $f' = 1$, $g = (\log x)^2$ とおくと $f = x$ なので

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= fg - \int fg' dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x\end{aligned}$$

となる。計算には

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

を用いた。

(13) $f' = 1, g = \arctan x$ とおくと $f = x, g' = \frac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= fg - \int fg' \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t = 1 + x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \int \frac{x}{t} \frac{1}{2x} \, dt = \int \frac{1}{2} \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

となる。演習問題 5.21 も参考のこと。

(14) $f' = 1, g = \arcsin x$ とおくと $f = x, g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= fg - \int fg' \, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t = 1 - x^2$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -2x$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{1}{-2x} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \\ &= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(15) (16) 両方まとめて解く。 $I = \int e^x \sin x \, dx, J = \int e^x \cos x \, dx$ とおく。 $f' = e^x, g = \sin x$ とおくと

$$I = fg - \int fg' \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - J$$

となる。一方 $f' = e^x, g = \cos x$ とおくと

$$J = fg - \int fg' \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + I$$

となる。2式を連立されて解くと

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$