数学序論に対する追加説明 ♯1

- 学籍番号を指定された format で書いて下さい。

- 1 年生は出席番号を書いて下さい。
  学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭部分に何個かの 0 があればそれを削除したもの。例えば学籍番号が **151080005x** であれば **5**，**151080038x** であれば **38**，**151080157x** であれば **157**， **151088088x** であれば **8088** です。

- 2 年生以上の学生の様に学籍番号が「15」で始まらない学生は 10 桁の学籍番号を書いて下さい。

- 指定された format の通り書く能力を身につけることは非常に重要です。

- 用紙を置く場所を間違えないで下さい。

- 解答は他人が読んで理解可能なように書く必要があります。書く途中および書上げたら,「他人の目」で推敲して，他人が読んで分かるかをチェックしてください。特に高校でそのような訓練をしていない人は最初は意識的に推敲をして下さい。

- X と Y が同値とは「$X \implies Y$ が真かつ $Y \implies X$ が真」ということなので，それを証明すればよい訳です。

- ここでは (8) を例に解説する。$X : P \implies Q$, $Y : \neg Q \implies \neg P$ とするとき，X と Y が同値であることを示す。真理値表を書くと次のようになる。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$	$X \implies Y$	$X \impliedby Y$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

  この真理値表であれば，示すべきことが真理値表の欄に書かれているので，何か説明が書いてなくても，まあ許されるであろう。

- 真理値表の最後の 2 つの欄を書かなくても証明をすることは可能です。しかし次の真理値表だけでは証明としては不十分

です。この様な真理値表のみで説明がまったく書いてない人がたくさんいました。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

証明すべきことは $X \implies Y$ および $X \impliedby Y$ が真であることです。

しかし，今の場合真理値表にはそのことは書かれていません。真理値表からどうして同値と分かるのか，理由を理解しているかが読む人 (私) に分かるように書かれていなければ証明とはいえません。

- この真理値表に加えて「X ($P \implies Q$) と Y ($\neg Q \implies \neg P$) の対応する欄の真偽が一致しているので同値である。」と書くのは 1 つの解答例でしょう。

  解説を載せたのでそれを参考に (勿論解説と同じでなければならないということはない)。

- 「よって同値である」だけの説明もどうして「よって」なのか分かりません。

- 「真理値表より同値であることが分かる」も前項とほとんど同じでダメです。理由を書いてください。

- ベン図を用いて解答した人がいました。ベン図は視覚的なので，考える手段として有効ですが，ベン図を描くことイコール証明ではないので，別の手段で証明することが必要です。

- 真理値表に関して理解が不十分な人が若干いたので，再度説明する。

  真理値表は真偽のすべての場合を記述する欄とそれに対応して真偽が決まる欄からなる。真偽のすべての場合を記述する欄が縦にいくつの行が必要かということは記述する欄に入る命題の個数に依存する。

  (1) $\neg(\neg P) \equiv P$ の場合記述する欄に入る命題の個数は 1 個なので行は 2 行である。

(4) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ の場合命題の個数は 2 個なので行は 4 行必要になる。

(3) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の場合命題の個数は 3 個なので行は 8 行必要になる。

一般に命題の個数が k 個のとき行は 2^k 行必要になる。

P
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

この欄の右に真偽を記述するのに必要な欄を書いていく。

(1) の場合必要なのは $\neg(\neg P)$ であるが，この真偽を見るために $\neg P$ も必要なのでこの欄も書くと，真理値表は次の様になる。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

P と $\neg(\neg P)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。

この証明は同値の性質を使っているが，定義に基づいてもできる。$P \equiv \neg(\neg P)$ の定義は

$$P \implies \neg(\neg P) \quad P \impliedby \neg(\neg P)$$

がともに真であることだった。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \implies \neg(\neg P)$	$P \impliedby \neg(\neg P)$
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T

真理値表より $P \implies \neg(\neg P), P \impliedby \neg(\neg P)$ がともに真なので同値である。

後者は煩雑なので前者の証明の方が簡単である。

(4) の場合 $P \land Q, \neg(P \land Q), \neg P, \neg Q, (\neg P) \lor (\neg Q)$ が必要になる。

P	Q	$P \land Q$	$\neg(P \land Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \lor (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \land Q)$ と $(\neg P) \lor (\neg Q)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。

P	Q	R	$Q \land R$	$P \lor (Q \land R)$	$P \lor Q$	$P \lor R$	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(3) の場合は上の様になっており，$P \lor (Q \land R), (P \lor Q) \land (P \lor R)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値である。

- 命題 1.3 について解説しておく。怒られるを A，勉強するを S とすると，命題は

$$\neg A \implies \neg S$$

である。対偶命題を作ると

$$\neg\neg S \implies \neg\neg A$$

即ち

$$S \implies A$$

となる。普通の日本語に直すと

彼は勉強すると怒られる

となる。どこかおかしいと思われるが，どこがおかしいのだろう。

- 日常の「P ならば Q」では P が「原因」で，Q が「結果」である。「P がおこることによって Q がおこる」のような意味で使われる。そして通常「原因」が時間的に先におき,「結果」は後でおこる。
- 数理論理の「$P \implies Q$」で P は「原因」とは限らず，Q は「結果」とは限らない。数理論理では P のことを「仮定」と呼び。Q のことを「結論」と呼ぶ。
- P と Q の間にある関係は P が真なら Q が真だということを主張しているだけであり，時間的にどちらが先にあるということは関係ない。
- 時間的に P が先で Q が後におきたとすると。対偶を作ると，仮定 $\neg Q$ が時間が後で，$\neg P$ が先になる。
- 演習問題に戻ると，時間的には A が先で，S が後だと考えられる。$S \implies A$ は時間の順序を考慮して日本語に直すと

  彼が勉強しているならば，(それより前に) 彼は怒られた。

  となる。こう考えれば対偶と元の命題が同値であることが分かる。