数学序論に対する追加説明 $\sharp 2$

- 番号は format に基づいて正確に書いて下さい。
番号が正しく書かれていないものは未提出とみなす。

- 用紙を置く場所を間違えないこと。
置く場所を間違えた解答は未提出とみなす。

- 演習問題で「真偽を判定せよ」とあるとき，これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく,「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが**必ず**必要である。**これからの演習問題も常にそういう意味だと理解すること**。

  結論だけ書いてある答案は，仮に結論があっていてもテストのように採点をすれば 0 点である。

- 「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$」を例にとる。

- 「偽である。」とだけ書いてある答案は，結論はあっていても，0 点である。

- 「$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5}$ は必ず 0 以上になるので真である」というのは理由にはならない。(「真」という部分は間違っているが，今はそのことは問題にしない。)

  P という命題を証明するのに「P が正しいので P が示された。」と書いてあるのと同じである。

- 「x にどのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」というのもダメである。「どのような数をいれても」と書いてあるが，実数は無限集合なので，このことを実際に行うことは不可能である。

  実行不可能なことを根拠にすることはできない。

- 「$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$ は偽。$x = 1$ が反例」という解答があった。これは「存在」と「任意」に関連するので説明をする。

  これが「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$ は偽。$x = 1$ が反例」というのであれば正しい議論である。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

であり，$x = 1$ は

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

なので否定命題が成立し，もとの命題は偽であることが分かる。しかし

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

である。

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} > 0$$

は成立するが，否定命題が成立するとはいえない。この意味で $x = 1$ は反例にはなっていない。

- 「$\forall, \exists$」の入った命題の否定に関しては多くの人ができるようになっている。しかし，命題の内容を考えて真偽を判断するところは不十分な人が多い。演習問題 1.5 にきちんと答えられれば，理解していると判断してよいだろう。

- **一般的な数学の学習の仕方について：**

  数学は論理の積み重ねであるから，要綱・演習問題で分からない所があれば，その部分より前に書いてあることの理解が不十分な訳である。例えば演習問題 1.5 で

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

  という命題の否定命題をつくれないときは，

  (1) 「$\forall x$」の否定の仕方が分からないなら，少し前の部分を見ればよいし，

  (2) 「$a < x \implies b < x$」の否定が分からないときは 1.1 節を見る必要がある。

この様に自分の分からない所を自分で見つけることは有効な学習の方法である。

どこでやったか記憶にないときは，要綱を順にさかのぼりながら見て探すのも 1 つの方法である。

勿論「他人に質問してはいけない」と言っているのではなく，自分で学習する態度をつくるために役立つ方法という意味である。

- 「どの様に書けばよいのか分からない」という質問をうけたので，ことに関して述べておく。
  このようなときには 2 通りの場合が考えられる。

  (1) 本当に書き方**だけ**が分からない場合，

  (2) 内容の理解が不十分な場合，である。

  「どの様に書けばよいのか分からない」と質問してくる人の多くは (1) の書き方の問題ではなく，(2) の内容理解の問題である。(2) に関しては後で述べるとして，ここでは (1) について述べる。

  自分の頭の中に，演習問題を解いている自分とは別に，**他人の立場で**その演習問題の解答を読んでいる自分を想定する。その他人である自分が，自分である自分の書いたものを読んで，**論理が追えて**正しいと思えたら OK。最初は慣れないと思うが，少し訓練するとできるようになると思う。他人として**融通のきかない** computer を想定するのも 1 つの方法である。

- 自分が内容を理解しているのか，してないのかを自分で正確に把握することは非常に重要である。それができると理解への道の 50%以上の場所にいると言える。

  自己把握に関して言うと次の様な段階が考えられる。

  (1) 理解してないのに理解していると誤解している。

  (2) 理解が不十分でそのことは自覚しているが，どこが理解できていないかを把握できていない。所謂「なんとなく分からない」状態。

  (3) 理解が不十分であることを自覚していて，どこが理解できていないかを把握している。

  (4) 正確に理解している。

(2) を (3) に変える所が理解の最も重要な階梯だと言える。

- 演習問題 1.5 を解説する。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

という命題を P とする。P の否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\; a < x \land x \leq b$$

となる。

「$a < b$」という命題を Q とおく。$\neg P$ が真のとき

$$a < x \ \land \ x \leq b \quad \implies \quad a < b$$

より Q も真になる。よって

$$\neg P \implies Q$$

が成立する。この段階で $\neg P$ と Q が同値としてしまった人が若干いたが，この段階では同値は示されていない。$Q \implies \neg P$ を示すことが必要である。そのためには Q が真のとき $\neg P$ の性質をもつ x を見つければよい。

Q が真だとする。$x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと $a < x < b$ を満たす。よって

$$Q \implies \neg P$$

が成立する。以上により $\neg P$ と Q は同値である。即ち

$$\neg P \quad \equiv \quad Q$$

が成立する。これより

$$P \quad \equiv \quad \neg Q$$

である。以上により $\neg Q$ が真のとき即ち $a \geq b$ のとき命題 P は真であり，$a < b$ のとき偽であることが分かる。