

## 数学序論に対する追加説明 #3

- 今日演習を行う予定の演習問題についてあらかじめ解説しておく。

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x > y \quad (1)$$

と

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x > y \quad (2)$$

の真偽を考察せよ，というのが演習問題 1.6 である。

- 「任意」と「存在」が 2 つ以上あるときは順序により意味が全く違うことに注意すること。この問題は (1) と (2) の違いをきちんと理解するための問題である。

(1) は任意の  $x$  に対し (それに対応する)  $x > y$  を満たす  $y$  が存在する，という意味である。

(2) はある  $y$  が存在して，どんな  $x$  に対しても  $x > y$  が成立する，という意味である。

- このことは次のように考えることもできる。

自分と相手でゲームをしている。自分は命題を成立させたいと思い，相手は命題が成立させたくないと思っているとする。

「任意」は相手が選び，「存在」は自分が選ぶと考える。

前者の命題は相手が実数  $x$  をどの様に選んでも，それに対応して自分が  $x > y$  となる  $y$  を選べるかという問題になる。これは当然可能なので前者は正しい命題である。

後者の命題は最初に自分が  $y$  を選ばなくてはならない。どのような  $y$  を選ぶかという任意の  $x$  に対して  $x > y$  となる  $y$  であるが，そのような  $y$  は存在しないので選ぶことができない。よって後者は正しくない命題である。