数学序論に対する追加説明 $\sharp 4$

- 演習問題 2.2 (2) を解説する。

  結論は $A = \{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

  結果のみ書いてある解答も間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解説しておく。

- $A = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 2 が A に含まれない。

- この表示では余りが直接は見にくいので

$$A = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ または } k = 0\}$$

  という書き方もできる。ただしこの書き方は要求されている例 2.1 (2) の表示とは異なる。

- この問題に関連する集合の基本事項は

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B}$$

  および

$$\boxed{A \subseteq B \iff \text{「}\forall a \;\; a \in A \implies a \in B\text{」}}$$

  である。

- 自然数 (整数) n を p で割った余りが r という事は

$$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leq r < p)$$

  と表される。

  よって 3 で割った余りが 2 である自然数の集合は

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; x = 3k+2\}$$

  となる。

- $A = \{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ とおくとき $A = B$ を示せばよい。

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

  なので $A \subseteq B$ および $A \supseteq B$ を示す。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。そのためには

$$\forall a \quad a \in A \implies a \in B$$

を示せばよい。

- a を A の任意の元とすると，ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k-1$ と書ける。$k \geq 1$ より $3k-1 \geq 2 > 0$ となるので，a は自然数である。

また
$$a = 3k-1 = 3(k-1)+2$$
であり，$k-1 \in \mathbb{Z}$ である。

よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は自然数であり，ある整数 k が存在して，$a = 3k+2$ となる。

ここで $k < 0$ とすると $k \leq -1$ なので

$$a = 3k+2 \leq -3+2 = -1 < 0$$

となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geq 0$ である。

よって $j = k+1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり，

$$a = 3k+2 = 3(j-1)+2 = 3j-1$$

となる。

よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

- 次に (4) を考える。

3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 である集合を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

結論は $A = \{\, 15k-7 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ である。

この段階では予想なのできちんとした証明が必要である。

- $B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z}\ x = 3k_1+2,\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}\ x = 5k_2+3 \,\}$ とするとき $A = B$ を示す。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。

  a を A の任意の元とする。$a = 15k - 7\,(k \in \mathbb{N})$ と書かれているので，$a = 3(5k-3)+2$ と書き直すことができる。ここで $5k-3 \in \mathbb{Z}$ である。また $a = 5(3k-2)+3$ と書ける。ここで $3k-2 \in \mathbb{Z}$ である。また $k \geq 1$ より $a = 15k - 7 \geq 15 - 7 = 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので，ある整数 k_1 が存在して $a = 3k_1+2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2+3$ と書ける。

  $5k_2 + 3 = 3k_1 + 2$ なので $5k_2 + 1 = 3k_1$ となっている。$X = 5k_2 + 1(= 3k_1)$ とおく。

  k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 j が存在して $k_2 = 3j + r$ と書ける。$r = 0$ または 1 または 2 である。

  $X = 5(3j + r) + 1 = 15j + 5r + 1$ は 3 で割り切れる。

  $r = 0$ のとき

  $$X = 15j + 5 \cdot 0 + 1 = 3 \cdot 5j + 1$$

  となり X を 3 で割った余りが 1 になる。よって $r \neq 0$ である。

  また $r = 2$ のとき

  $$X = 15j + 5 \cdot 2 + 1 = 3 \cdot (5j + 9) + 2$$

  となり X を 3 で割った余りは 2 になる。よって $r \neq 2$ である。

  $r = 1$ のときは 3 で割り切れるので $r = 1$ であることが分かる。

  よって $k_2 = 3j + 1$ と書くことができる。

  $$a = 5k_2 + 3 = 5(3j + 1) + 3 = 15j + 8 = 15(j + 1) - 7$$

  となる。$k = j + 1$ とおく。$j < 0$ のとき $j \leq -1$ なので

  $$a = 15j + 8 < -15 + 8 = -7 < 0$$

  となり a が自然数であることに矛盾，よって $j \geq 0$ である。このとき $k \in \mathbb{N}$ となる。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。