数学序論に対する追加説明 $\sharp 5$

- 演習問題 2.6 (1) を解説する。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

  を証明せよ，という問題である。

- すでに述べているようにこの問題に関連する集合の基本事項は

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

  および

$$A \subseteq B \iff 「\forall a \;\; a \in A \implies a \in B」$$

  である。

- この問題では，共通部分と和集合の定義を知っていることが必要である。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

  および

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

  である。

- これらに加え 1.1 節で学んだ論理の分配法則を使用する。論理の分配法則とは P, Q, R を命題とするとき

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

  である。

- x を集合の元とする。

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

よって示された。

- 内容的には同じことだが，集合のイコールで変形していく書き方もある。

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \cup C \,\} \\
&= \{\, x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \,\} \\
&= \{\, x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \,\} \\
&= \{\, x \mid x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \,\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

- 次に演習問題 2,8 (2) を解説する。X を全体集合とするとき

$$
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c
$$

の成立を示す。

- 証明には論理の de Morgan の法則が必要である。論理の de Morgan の法則とは P, Q を命題とするとき

$$
\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)
$$

が成立するというものであった。

- x を X の元とする。

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\
&\iff \neg(x \in A \cup B) \\
&\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\
&\iff x \notin A \wedge x \notin B \\
&\iff x \in A^c \wedge x \in B^c \\
&\iff x \in A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

よって示された。