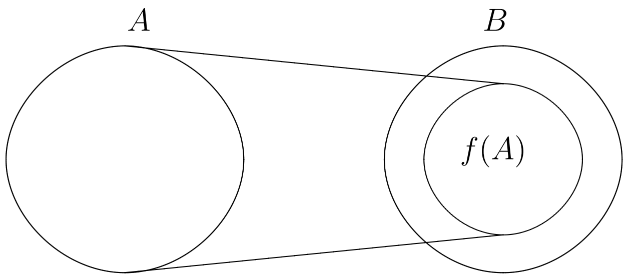
数学序論に対する追加説明 $\sharp 6$

- 全射，単射について解説する。A から B への写像を
$$f : A \longrightarrow B$$
とする。定義域は A，終域は B である。値域は
$$\{\, f(a) \mid a \in A \,\} = \{\, b \in B \mid \exists a \in A \; b = f(a) \,\}$$
である。これを $f(A)$ と書く。模式図で見ると次図の様になっている。



- f が全射であることの定義は
$$f(A) = B$$
が成立することである。全射であることを示すためには次を示せばよい。

$$\boxed{\forall b \in B \; \exists a \in A \; b = f(a)}$$

- たとえば $A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$，$B = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ とし写像
$$f : A \longrightarrow B$$
を
$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$$
と定義する。このとき
$$\begin{aligned} f(A) &= \{\, f(1), f(2), f(3), f(4) \,\} \\ &= \{\, 3, 1, 1, 1 \,\} = \{\, 1, 3 \,\} \end{aligned}$$
となる。$f(A) = \{\, 1, 3 \,\} \neq \{\, 1, 2, 3 \,\} = B$ なので f は全射ではない。

- 例 2.9(1)[演習問題 2.12 (1)] を考える。

$$
\begin{aligned}
f :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longmapsto x^2
\end{aligned}
$$

  この f に対して $f(\mathbb{R})$ を求めて $\mathbb{R}$ と等しいかどうかを調べればよい。

- 結論は
$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [\,0,\,\infty\,)$$
  である。これが示されれば $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ となり f が全射でないことが分かる。

- $f(\mathbb{R}) \subseteq [\,0,\,\infty\,)$ を示す。y を $f(\mathbb{R})$ の任意の元とする。$f(\mathbb{R})$ の定義よりある $x \in \mathbb{R}$ が存在して $y = f(x)$ となる。$y = f(x) = x^2 \geq 0$ より $y \in [\,0,\,\infty\,)$ となる。

- 関数 $y = \sqrt{x}$ の存在を既知として $[\,0,\,\infty\,) \subseteq f(\mathbb{R})$ を示す。
  y を $[\,0,\,\infty\,)$ の任意の元とする。y は関数 $\sqrt{x}$ の定義域に含まれているので，$x = \sqrt{y}$ とおく。このとき

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

  となるので $y \in f(\mathbb{R})$ となる。

- 写像
$$f : A \longrightarrow B$$
  が次を満たすとき単射という。

$$\boxed{\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)}$$

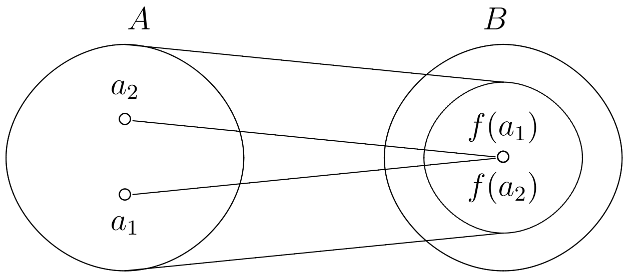
  この条件は対偶をとると

$$\boxed{\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2}$$

  となる。「単射でない」上の否定なので

$$\exists a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$$

  となる。次は単射でない場合の模式図である。



- 前に考えた写像 f が単射かどうか考える。$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とし写像

  $$f : A \longrightarrow B$$

  を

  $$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$$

  と定義した。

  $$2 \neq 3 \land f(2) = 1 = f(3)$$

  となるので f は単射ではない。

- 写像 f を

  $$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} \longrightarrow [\,-1,\ 1\,] \\ &x \longmapsto \cos x \end{aligned}$$

  で定義する。$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ で $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$ なので f は単射ではない。