数学序論に対する追加説明 $\sharp 7$

- 演習問題 3.9 について解説する。(4) は「具体的に求め」という文章がないので，一般的な n 乗根の形でもよい。即ち n 乗根は
$$\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \quad (k=1,\ldots,n)$$
という形をしているので，
$$\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{2\cdot 2\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{2\cdot 3\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{2\cdot 4\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{2\cdot 5\pi i}{5}\right)$$
となる。
$\exp\left(\frac{2\cdot 5\pi i}{5}\right) = \exp(2\pi i) = 1$ は分かるが，他の値は $\cos\frac{2\pi i}{5}$ 等が分からないので，すぐには「具体的に」は書けない。

- 5 乗根については「具体的に求めよ」とは書いていないので，以下のことは不要であるが，この場合「複 2 次式」と考えることにより求めることができるので説明しておく。

- 1 の 5 乗根は $z^5=1$ の解なので
$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$
より $z=1$ または $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を満たす。

- $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき，$z=0$ は解ではないので，両辺を z^2 で割ると
$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$
となる。$t=z+\frac{1}{z}$ とおくと $t^2=z^2+2+\frac{1}{z^2}$ なので t は 2 次方程式
$$t^2+t-1=0$$
の解である。

- これを解くと $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる。$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき
$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

より z は 2 次方程式

$$z^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

の解である。これを解くと

$$z = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。

- $t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

より z は 2 次方程式

$$z^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

の解である。これを解くと

$$z = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad z = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。

- よって

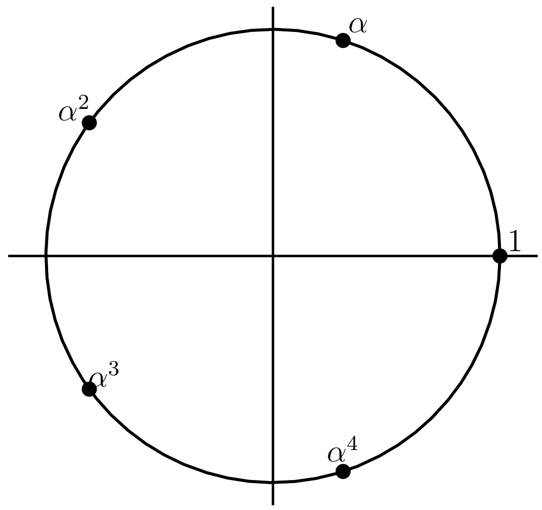
$$\begin{aligned} &1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\ &\quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

が求める解である。

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \alpha^3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \alpha^4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \alpha^5 &= 1 \end{aligned}$$

なので図の様になる。



α
α^2
1
α^3
α^4