数学序論追加説明 ♯8

- 三角関数の加法定理から導かれる諸公式について説明する。
- 高校時代は加法定理としてとらえる他なかったが，オイラーの公式を学んだので，そちらの立場から求めることもできる。解説には両方のせてあるので，そちらも参考に。
- 加法定理は以下の式である。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

これをオイラーの公式を用いて表すと

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

となる。オイラーの式の方が簡単に見える。実際証明も簡単な場合がある。ここではオイラーの公式と指数法則を用いた証明を紹介する。

- 練習問題 4.4 (1) をオイラーを用いて示してみる。(1) は以下の式である。

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,\qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

- $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\exp\left(ix+i\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \exp(ix)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=(\cos x+i\sin x)\,i\\ &= -\sin x+i\cos x\end{aligned}$$

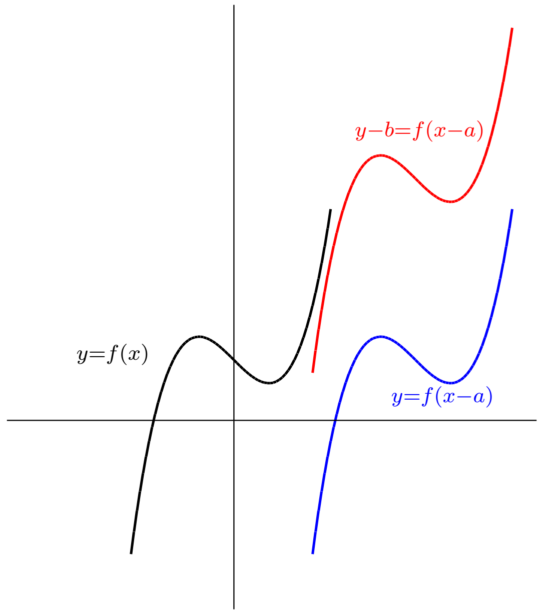
両辺を比較して $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ が得られる。

- $\exp\left(-i\dfrac{\pi}{2}\right) = -i$ であることに注意すると

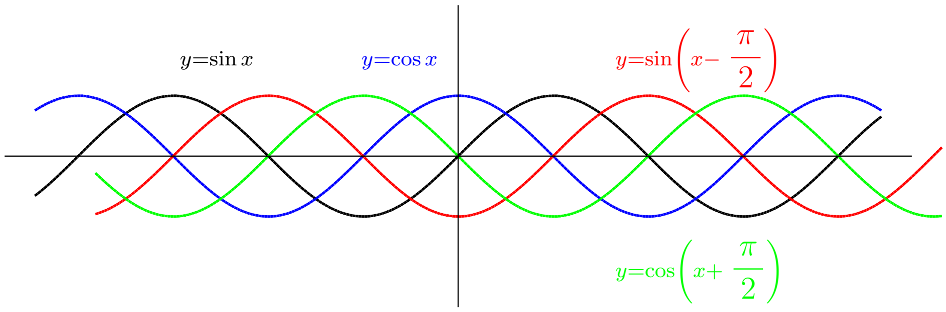
$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \exp\left(ix-i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \exp(ix)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i\sin x)(-i) \\ &= \sin x - i\cos x\end{aligned}$$

  両辺を比較して $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x,\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ が得られる。

- (1) について証明ではないが，グラフで考えることで成立が直感的に理解できるかもしれない。



$y = f(x)$ のグラフを x 方向に a 平行移動したグラフ (青色のグラフ) を表す式は $y = f(x-a)$ である。$y = f(x)$ のグラフを x 方向に a，y 方向に b 平行移動したグラフ (赤色のグラフ) を表す式は $y - b = f(x-a)$ である。



$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ は $y = \sin x$ を x 方向に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \cos x$ を y 軸に関して折り返したものなので，$y = -\cos x$ である。$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ は $y = \sin x$ を x 方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \cos x$ となっている。

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ は $y = \cos x$ を x 方向に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \sin x$ $y = -\cos x$ である。$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ は $y = \cos x$ を x 方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \sin x$ を y 軸に関して折り返したものなので，$y = -\sin x$ である。

- (5)3 倍角の公式を示そう。

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{i3\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta i\sin\theta + 3\cos\theta i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

このままでもよいが，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta \\ &= -4\sin^3\theta + 3\sin\theta\end{aligned}$$

- (7) 和積公式を 1 つ示そう。$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ より

$$\begin{aligned}e^{-ix} &= e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x \\ e^{ix} + e^{-ix} &= \cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x = 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} &= \cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x = 2i\sin x\end{aligned}$$

よって

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が成立している。

- これを用いて計算を実行する。

$$
\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
=&2\frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\exp\left(-i\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\exp\left(-i\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(i\frac{\beta}{2}\right)-\exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\beta}{2}\right)\right)\times\\
&\left(\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\beta}{2}\right)+\exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(i\frac{\beta}{2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\alpha\right)-\exp\left(-i\beta\right)+\exp\left(i\beta\right)-\exp\left(-i\alpha\right)\right)\\
=&\frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\alpha\right)-\exp\left(-i\alpha\right)+\exp\left(i\beta\right)-\exp\left(-i\beta\right)\right)\\
=&\sin\alpha+\sin\beta
\end{aligned}
$$