

数学序論に対する追加説明 #10

- 演習問題 4.12 について解説する。
 - (1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。
 - (2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。
- 対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

- 対数関数がラテン語で指数関数が日本語だと考え、前項を用いて指数関数の言葉に直せば、証明は自然にできる。
- $x = \log_c a$ とおくと

$$a = c^x \tag{1}$$

が成立している。

証明すべき式を対数を用いずに書くと

$$a^b = c^{bx} \tag{2}$$

である。

- 式 (1) から式 (2) を証明すればよい訳だが、式 (1) を b 乗すれば自然に式 (2) が導かれる。

$$a^b = (c^x)^b = c^{xb} = c^{bx}$$

- $x = \log_c b, y = \log_c a$ とおくと

$$b = c^x \tag{3}$$

$$a = c^y \tag{4}$$

である。証明すべき式は

$$a^x = b^y$$

である。式 (3), 式 (4) を用いれば証明は自然に導かれる。

$$a^x = (c^y)^x = c^{yx} = c^{xy} = (c^x)^y = b^y$$