数学序論に対する追加説明 $\sharp$11

- 演習問題 4.13 について解説する。

  逆三角関数では次の関係が基本的である (辞書)。

$$
\begin{aligned}
y = \arcsin x &\iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)\\
y = \arccos x &\iff x = \cos y \quad (0 \le y \le \pi)\\
y = \arctan x &\iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- (2)-(2) について解説する。示すべき式は

$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$$

  である。

- $a = \arcsin\dfrac{3}{5},\ \ b = \arcsin\dfrac{5}{13}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{5} &= \sin a \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{5}{13} &= \sin b \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le b \le \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

  が成立している。

- このとき示すべき式は

$$a + b = \arcsin\frac{56}{65}$$

  である。

  この式を辞書を用いて「翻訳」すると, 示すべき式は

$$\frac{56}{65} = \sin(a+b) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le a + b \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

  となる。

- $\sin(a+b)$ を求めるために $\cos a, \cos b$ を求める。$-\dfrac{\pi}{2} \le a \le \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos a \ge 0$ である。

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\cos b \geq 0$ なので同様に

$$\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ &= \frac{3}{5}\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

となり式 (1) の左側の式は示される。

- しかし式 (1) の右側の値の範囲はまだ示されていない。今の所分かるのは

$$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$$

から従う

$$-\pi \leq a + b \leq \pi$$

である。

- $-\frac{\pi}{2} \leq a+b \leq \frac{\pi}{2}$ を示すにはいくつか方法があるが，ここでは次を用いる。$-\pi \leq X \leq \pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2} \iff \cos X \geq 0$$

である。

$$\begin{aligned}\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b &= \frac{4}{5}\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\frac{5}{13} \\ = \frac{33}{65} \geq 0\end{aligned}$$

より $-\frac{\pi}{2} \leq a+b \leq \frac{\pi}{2}$ が示される。

- 次に (2)-(4) を考える。示すべき式は

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

である。

- $\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}, \beta = \arctan\dfrac{1}{239}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= \tan\alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{239} &= \tan\beta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。このとき示すべき式は

$$4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

である。式 (3) を示すためには

$$\tan(4\alpha - \beta) = \tan\frac{\pi}{4} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < 4\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

を示せばよい。

- 最初に $\tan 2\alpha, \tan 4\alpha$ を計算し，$\tan(4\alpha - \beta)$ を求める。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\dfrac{1}{5}}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\dfrac{5}{12}}{1-\left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$\begin{aligned} \tan(4\alpha - \beta) &= \frac{\tan 4\alpha - \tan\beta}{1+\tan 4\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1+\dfrac{120}{119}\dfrac{1}{239}} \\ &= \frac{1+\dfrac{1}{119}-\dfrac{1}{239}}{1+\dfrac{239-119}{119}\dfrac{1}{239}} = \frac{1+\dfrac{1}{119}-\dfrac{1}{239}}{1+\left(\dfrac{239}{119}-\dfrac{119}{119}\right)\dfrac{1}{239}} \\ &= \frac{1+\dfrac{1}{119}-\dfrac{1}{239}}{1+\dfrac{1}{119}-\dfrac{1}{239}} = 1 \end{aligned}$$

- $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるが

$$0 < \tan\alpha = \frac{1}{5} < 1$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

が成立する。よって

$$0 < 4\alpha < \pi \tag{4}$$

また $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるが

$$0 < \tan\beta = \frac{1}{239} < 1$$

より

$$0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

三辺に -1 をかけて

$$-\frac{\pi}{4} < -\beta < 0 \tag{5}$$

を得る。式 (4) と式 (5) を加えて

$$-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \beta < \pi \tag{6}$$

となる。式 (6) と $\tan(4\alpha - \beta) = 1 > 0$ より

$$0 < 4\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$$

となり証明が完了する。