数学序論に対する追加説明 $\sharp$12

- 演習問題 5.4 (2) について解説する。

  $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}$ を求めたい。予想としては 0 だが，これをはさみうちの定理を用いて示す。

- 極限値が 0 であることを示すには次のような $f(n)$ を見つければよい。

$$0<\frac{n^2}{3^n}<\frac{n^2}{f(n)},\qquad \frac{n^2}{f(n)}\to 0\,(n\to\infty) \tag{1}$$

- $f(n)$ が次を満たすとき (1) が満たされる。

$$f(n)<3^n,\qquad f(n) \text{ は 3 以上の多項式}$$

- 2 項定理を用いて $f(n)$ を見つける。

$${}_nC_i=\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

  なので ${}_nC_i$ は n の i 次式になっていることに注意する。

$$\begin{aligned}3^n&=(1+2)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i2^i\geq\sum_{i=0}^{3}{}_nC_i2^i\\&={}_nC_0+{}_nC_12^1+{}_nC_22^2+{}_nC_32^3\\&=1+2n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 4+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}2^3\\&\geq\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

  より

$$f(n)=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$$

  とおくと

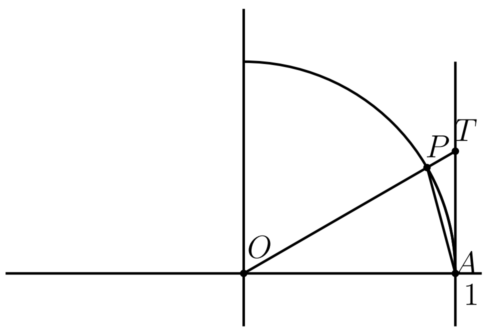
$$0<\frac{n^2}{3^n}<\frac{3n^2}{4n(n-1)(n-2)}$$

  となるが,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{4n(n-1)(n-2)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{1}{n}}{4\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}\\&=\frac{3\cdot 0}{4\cdot 1\cdot 1}=0\end{aligned}$$

となり示される。

- 必要な次数の多項式を見つければ演習問題 5.4 の他の問題も同様にできる。
- 演習問題 5.5 (3) について解説する。どう「無理化」するかが問題である。
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$
を用いてもうまくいかない。3 乗根を消すためには 3 乗をつくる必要がある。
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
を用いる。
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)&=\frac{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}\\&=\frac{\sqrt[3]{n^2}\,(n+1-n)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}\end{aligned}$$
よって
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\frac{1}{3}$$
- 演習問題 5.11 (1),(3) を考える。次図を参考に
$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$
を示す。



$x > 0$ とする。

$$\triangle OPA \text{ の面積} < \text{扇形 } OPA \text{ の面積} < \triangle OTA \text{ の面積}$$

である。それぞれの面積を計算すると

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

これより分母の 2 をはらい，逆数をとれば

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to +0$ のとき $\cos x \to 1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成立する。

- $n \leq t < n+1$ となる自然数 n をとる。

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{t}$$

が成立している。$n \leq t$ より

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

となる。

$$1 + \frac{1}{t} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

が成立している。$t < n+1$ より

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる。

よって

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

の成立が示される。

ここで例 5.8 と演習問題 5.8 より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

であり，$t \to \infty$ のとき $n \to \infty$ となるので

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

となる。