

## 数学序論に対する追加説明 #13

- 演習問題 5.18 について解説する。
- 定義に基づいて  $y = 2^{x^2}$  の導関数を求める。  
指数関数の極限に関して使える事実は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad (1)$$

のみである。この問題でもこれに帰着させる必要がある。

- $2 = e^k$  とおくと  $k = \log 2$  なので

$$y = 2^{x^2} = (e^k)^{x^2} = e^{kx^2}$$

となる。

$$\Delta = \frac{e^{k(x+h)^2} - e^{kx^2}}{h}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{e^{k(x+h)^2} - e^{kx^2}}{h} = \frac{e^{k(x^2+2xh+h^2)} - e^{kx^2}}{h} \\ &= \frac{e^{kx^2} e^{k(2xh+h^2)} - e^{kx^2}}{h} = e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{h} \\ &= e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{k(2xh+h^2)} \frac{k(2xh+h^2)}{h} \\ &= e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{k(2xh+h^2)} k(2x+h) \end{aligned}$$

よって

$$(2^{x^2})' = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = e^{kx^2} 2kx = 2x2^{x^2} \log 2$$

- 次に  $y = \log x$  を考える。対数関数に関しても使える極限は (1) である。これに帰着させることが必要である。

$$\Delta = \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

とおく。この式を (1) が適用できる形に変形する必要がある。

$y = \log x$  より  $x = e^y$  となる。  $k = \log(x+h) - \log x$  とおくと

$$\log(x+h) = y+k$$

より

$$e^{y+k} = x+h$$

となる。よって

$$\Delta = \frac{k}{e^{y+k} - e^y}$$

となる。  $h \rightarrow 0$  のとき  $k \rightarrow 0$  となるので

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = \lim_{k \rightarrow 0} \Delta = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^y(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

•  $y = \arctan(x^2)$  の導関数を求めるために必要な極限は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

である。

$$\Delta = \frac{\arctan(x+h)^2 - \arctan(x^2)}{h}$$

とおく。  $y = \arctan(x^2)$  とおくと

$$x^2 = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$k = \arctan(x+h)^2 - y$  とおくと  $\arctan(x+h)^2 = y+k$  より

$$(x+h)^2 = \tan(y+k) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y+k < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \tan(y+k) - \tan y &= (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 \\ &= 2xh + h^2 = h(2x+h) \end{aligned}$$

より

$$h = \frac{\tan(y+k) - \tan y}{2x+h}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{k}{\tan(y+k) - \tan y} (2x+h) = \frac{k(2x+h)}{\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)} - \frac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{k(2x+h) \cos(y+k) \cos y}{\sin(y+k) \cos y - \sin y \cos(y+k)} = \frac{k(2x+h) \cos(y+k) \cos y}{\sin(y+k-y)} \\
&= \frac{k(2x+h) \cos(y+k) \cos y}{\sin k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\arctan(x^2))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\sin k} \lim_{h \rightarrow 0} ((2x+h) \cos(y+k) \cos y) \\
&= 2x \cos^2 y = \frac{2x \cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{2x}{1 + \tan^2 y} \\
&= \frac{2x}{1 + x^4}
\end{aligned}$$