

数学序論追加説明 #14

- パラメータ表示されている曲線の概形を描くことについて解説する。
- 「関数 $y = f(x)$ のグラフの概形」を描くことと「パラメータ表示されている曲線の概形」ことの区別がついていない人がいる。

パラメータ表示とは曲線 C が 2 つの関数 $x = x(t), y = y(t)$ によって

$$C = \{ (x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

と表されていることをいう。

- 平面内に点 $P(t) = (x(t), y(t))$ を考える。 t が変化すると $P(t)$ が平面内を移動していく。 t を $-\infty$ から ∞ まで動かした点の移動の跡は曲線になるが、これが C である。

- パラメータ表示された曲線の概形を描くためには

- (1) 曲線上の点の移動方向
- (2) 曲線を描くために大事な点の座標

の 2 つを調べる必要がある。

- $t_1 < t_2$ に対し、 t を t_1 から t_2 に変化させたとき、点 $P(t)$ は点 $P(t_1)$ から点 $P(t_2)$ に移動する。曲線上の点の移動方向とは、この方向がどちら向きかということである。移動方向を求めるために 2 つの関数に関する増減表を作る。

- 曲線を描くために大事な点とは

- (1) 移動方向が変化する点
- (2) x 軸との交点および y 軸との交点

である。

- 例として

$$x = x(t) = 3t - t^3, \quad y = y(t) = 2 - t^2$$

を考える。

$x'(t) = 3 - 3t^2$ より $t = \pm 1$ において $x'(t) = 0$ となる。

$y'(t) = -2t$ より $t = 0$ において $y'(t) = 0$ となる。

間の正負を調べると増減表は以下の様になっている。

t		-1		0		1	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

- 増減表より点の移動方向および移動方向が変化する点の t の値が $-1, 0, 1$ であることが分かった。移動方向が変化する点は

$$(x(-1), y(-1)) = (-2, 1), (x(0), y(0)) = (0, 2), (x(1), y(1)) = (2, 1)$$

の 3 点である。

- y 軸との交点は $x(t) = 0$ を満たす。 $x(t) = 3t - t^3 = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$ である。よって y 軸との交点は

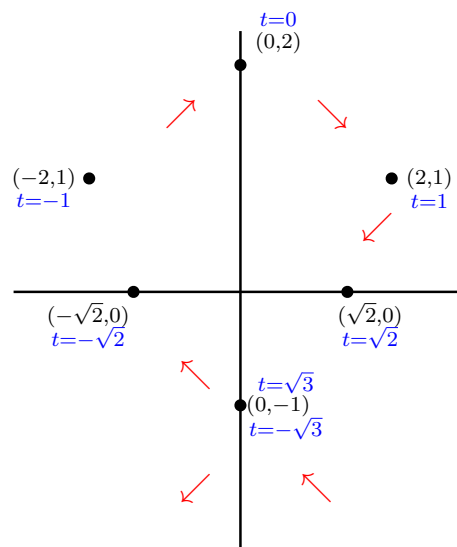
$$(x(\sqrt{3}), y(\sqrt{3})) = (x(-\sqrt{3}), y(-\sqrt{3})) = (0, -1), (x(0), y(0)) = (0, 2)$$

である。

- x 軸との交点は $y(t) = 0$ を満たす。 $y(t) = 2 - t^2 = 0$ となるのは $t = \pm\sqrt{2}$ である。よって x 軸との交点は

$$(x(-\sqrt{2}), y(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 0), (x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 0)$$

である。よって点をプロットすると次図の様になる。



以上より曲線は次図の様になる。

