数学序論要綱 $\sharp$1

1　命題と論理

数学的論理 $\Longleftarrow\!\Longrightarrow$ 日常的論理
同じ面 違う面

この章では数学的「論理」について学ぶ。数学的論理は「論理」という言葉を使用しているので，勿論日常用いられている「論理」と深い関係にある。

しかし数学的論理は厳密だが, 一般に使われている論理の全てを定式化できているわけではない。一般に使われている論理には,「正しい」「間違っている」以外にも,「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである[1]。

我々は以下で「論理」を取り扱うが広い意味の論理と区別したい時には**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。この章で学ぶ「論理」は数学のひとつの分野であるが，それに留まらない。数学の基礎にあるのが論理であり，これをきちんと理解しないで，数学のきちんとした理解はないことは肝に銘じておいて欲しい。

我々の脳は論理を考えるために進化したのではなく，進化した結果たまたま「論理も考えられる」ようになったようである。これは我々が自転車に乗れるようになるために直立歩行を始めたのではなく，直立歩行を始めた結果たまたま「自転車にも乗れるようになった」のと事情は同じであろう。自転車に乗るために練習が必要であるように，論理をきちんと扱うためには練習が必要である。

1.1　論理積・論理和

真 (T) または偽 (F) が定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。

例をいくつか見よう。命題自身に P のように名前をつける。

$$P_1 \;:\; 1 = 1$$

[1] ファジー論理，様相論理，量子論理等拡張 (または変形) の試みもなされている。

P_1 は「1 は 1 に等しい」という内容をもち，正しい命題である。数式で書いてあっても，言葉で書いてあっても内容は同じである。

$$P_2 \ : \ 1 \neq 1$$

P_2 は正しくない命題である。真偽が定まっているのが命題なので，正しくなくても命題である。

$$P_3 \ : \ 12345 \text{ は大きな数である。}$$

P_3 は真偽が確定しているとは言いがたいので命題ではない。ただし，たとえば「10000 以上は大きな数である」ことが事前に約束されている場合は正しい命題となる [1]。

2 以上の自然数 p が p および 1 以外の数で割り切れないとき p を素数と呼ぶ。p と $p+2$ が共に素数のときこれらを双子素数と呼ぶ。3 と 5，11 と 13 などが双子素数の例である。

$$P_4 \ : \ \text{双子素数は無限個存在する。}$$

この言明の真偽は今のところ知られていない。コンピュータで計算すると途切れることなく，大きな双子素数が見つかることから，「無限個存在するであろう」という予想はあるが，証明はされていない。

真偽の知られていない数学的言明に対する態度は 2 つある。(無意識な場合も含め) 多くの数学者の立場は「素数という概念が確定したものである以上，双子素数は無限に存在するかしないかのいずれかであって，真偽が知られていないだけであり，真か偽かは確定しているので P_4 は命題である」というものである。少数であるが次の様な意見もある。「すべての叙述の真偽があらかじめ定まっているということはできない。証明ないし反証されて初めて真偽が確定すると考えられる。よって P_4 を命題と呼ぶことはできない。」このような立場を**直感主義** (*intuitionism*) と呼ぶ。どちらかが正しいという事ではないが，我々は一応前者の立場を採用しておこう。

$$P_5 \ : \text{「クレタ人は嘘つきである」とエピメニデスが言った。}$$

エピメニデスはクレタ島のクノッソス生まれの詩人・預言者である。エピメネデスがクレタ人であるという点がポイントである。

「クレタ人が嘘つき」であるとすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきである。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは嘘なので，クレタ人は嘘つきではない。

[1] このような状況を「文脈依存」と呼ぶことがある。日常ではそれが明示的に表現されていない場合も多い。東京で「日本橋」というとほとんどの場合東海道 53 次の出発点の「ニホンバシ」であるが，大阪で「日本橋」というと多くの場合，電気街である「ニッポンバシ」を指すと思われる。

「クレタ人が嘘つきでない」とすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきではない。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは正しいので，クレタ人は嘘つきである。

この様にいずれの場合も「エピメニデスは嘘つきでありかつ嘘つきでない」という矛盾が発生する。矛盾を発生させる P_5 のようなものを**自己矛盾命題** (*self–contradictory proposition*) と呼ぶ。「命題」と呼んでいるがここで定義した意味での命題ではない。

演習問題 1.1 次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。

(1) $P_1 : 1 \geq 1$

(2) $P_2 : 2^{2015}$ は素数である。

(3) P_3 : 12345 は 3 で割り切れる。

(4) P_4 : 微分可能な関数は連続である。

(5) P_5 : 連続な関数は微分可能である。

(6) P_6 : 数学は難しい。

(7) $P_7 : n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。**「かつ」**(論理積，logical product, 合接，conjunction)，**「または」**(論理和，logical sum, 離接，disjunction)，**「$\cdots$ でない」**(否定，negation)，**「ならば」**(含意，inplication) などがそれである。次の記号を使用する。

$$
\begin{array}{lcl}
\neg P & : & P \text{ でない} \\
P \vee Q & : & P \text{ または } Q \text{ である} \\
P \wedge Q & : & P \text{ かつ } Q \text{ である} \\
P \implies Q & : & P \text{ ならば } Q \text{ である。}
\end{array}
$$

それぞれの記号の意味はほとんど明らかかもしれない。しかし，きちんと議論するためには次の様な**真理値表 (真理表)**(*truth table*) を使って定義する。T は**真** (*true*)，F は**偽** (*false*) を表す。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

いくつか注意をする。最初に「または」である。日常では「一方

のみが正しいとき正しい」という使われ方をする時がある。

「ランチにはコーヒーまたは紅茶が付いております。」
「両方下さい。」

レストランでこう言うと「ダメ」と言われるかもしれないが，数学的論理の「または」の使用法としては間違っていない。数理論理学でこのような「または」の使い方に対応するものとして**排他的論理和** (*exclusive OR*) がある。排他的論理和は P と Q が共に真のときは偽になるが，それ以外は論理和 (「または」) と同じである。日常では「または」は「論理和」にも使われるし,「排他的論理和」にも使われる。我々はそれを文脈依存で判断しているということになる。数理論理では「または」は「論理和」に用い,「排他的論理和」には使用しない。

「$P \implies Q$」にも注意が必要である。日常の論理では

仮定部分 (P) が正しければ結論部分 (Q) が正しい

という使われ方はするが，仮定部分が偽のときの議論はあまりされない。数理論理ではすべての場合に真偽が定まっていなければならないので,「仮定が偽である」ときにも「$P \implies Q$」[2] の真偽を確定させておかなくてはならない。

結論から先に言うと数理論理では

仮定が偽なら「$P \implies Q$」は真

としている。何故その様に決めるのだろう。そのことについて考える。

次の命題は正しいであろうか。

$$x = 1 \implies x^2 = 1 \tag{1}$$

この命題 (1) は正しい命題と考えるのが当然と思うかもしれない。しかし仮定が偽で結論が偽のとき，命題が偽と定義した世界に我々がいると考える。その世界では $x = 2$ のとき，命題は

$$2 = 1 \implies 2^2 = 1$$

であり，仮定・結論ともに偽となる。そのような世界では命題 (1) は偽としなければならない。

仮定が偽で結論が真のとき偽と定義した世界を考える。その世界では $x = -1$ のとき,

$$-1 = 1 \implies (-1)^2 = 1$$

[2] 命題「$P \implies Q$」に対し，仮定 P の真偽，結論 Q の真偽，命題「$P \implies Q$」の真偽を混同しないこと。「$P \implies Q$」が正しいからといって，仮定や結論が正しいわけではない。

仮定が偽，結論が真となり，命題 (1) は偽となる。このような世界では数学はかなりやりにくい。

以上の様な事から「ならば」の真偽は前述の真理値表のように定義することとする。「ならば」は論理では重要な概念であり，この概念をしっかり理解することが大切である。後で「必要条件・十分条件」を学ぶ所でまた取り上げるが，十分注意が必要な概念であることは強調しておく。

我々がよく使っている記号「 , 」**カンマ** (*comma*) にも注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$$x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて } x = -1, 1$$
$$x \text{ は } x > 0,\ x^2 = 1 \text{ を満たすので } x = 1$$

最初のカンマは「または」で 2 番目のカンマは「かつ」である。実際試験の解答でも，自分で書いたカンマを誤解して間違うという例を見かける。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

$P \wedge Q, \neg P$ の様に命題 $P, Q, \ldots$ と $\wedge, \vee, \neg$ を使って作られる言明を**論理式** (*fomula*) という。論理式の中には P の真偽によらずつねに正しい論理式 $P \vee \neg P$ や，つねに偽である論理式 $P \wedge \neg P$ もある。つねに正しい論理式は**恒真命題** (*tautology*) と呼ばれる。常に偽である命題を**矛盾** (*contradiction*) と呼ぶ。例えば $P \wedge \neg P$ などがそうである。

$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。論理式 X, Y に対し

> $X \Longleftrightarrow Y$ が恒真命題であるとき，X と Y は**同値** (*equivalent*) であるといい，$X \equiv Y$ と表す。

定義からすぐ分るように X の真理値表と Y の真理値表の対応する欄がすべてが同じならば 2 つの論理式は同値である。

命題 1.1 [(3)]　次が成立する。
(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ (2 重否定の法則)
(2) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (分配法則)
(3) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (分配法則)

---

(3) ここの命題の使い方は最初に定義した「命題」とは異なる。この様に 1 つの用語が 2 つ以上の意味で使われることもある。

定理・補題・系・例・演習問題などと並んで数学で使われており，この要綱で使われる。ここでの命題の意味は「正しい命題であって，理論体系のなかで重要な言明」ぐらいに解釈しておいてほしい。同様に定理は「正しい命題であって，理論体系のなかで特に重要な言明」，補題は「定理，命題を証明するために用いる言明」，系は「定理などから容易な考察によって導出される言明」に用いる。定理・命題・補題・系の区別は絶対的なものではなく人により異なる用語が使われることは勿論ある。

(4) $\neg(P \land Q) \equiv (\neg P) \lor (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(5) $\neg(P \lor Q) \equiv (\neg P) \land (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(6) $(P \implies Q) \equiv (\neg P \lor Q)$
(7) $\neg(P \implies Q) \equiv P \land \neg Q$
(8) **対偶** (*contraposition*)　$(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$　これは元の命題と対偶命題が同値である事を示している。

証明　ここでは (6) のみ証明しておく。残りは演習問題とする。

(6) を証明するためには，$\neg P \lor Q$ と $P \implies Q$ の真理値表をつくって比較すればよい。$\neg P \lor Q$ と $P \implies Q$ の対応する真理値が同じなら同値であるし，異なる部分があれば同値ではない。

次の真理値表から分かるように，$\neg P \lor Q$ と $P \implies Q$ の真理値は一致しているので，同値であることが分かる。▮

また U を $\neg P \lor Q$，V を $P \implies Q$ とし $U \implies V$ と $V \implies U$ が恒真命題であることを確かめてもよい。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \lor Q$	$P \implies Q$	U $\implies$ V	V $\implies$ U
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

命題 1.1 に関連して注意をいくつか。(7) から $P \implies Q$ を否定するためには仮定 (P) が正しく，結論 (Q) が間違っている例を見つければよいことが分かる。このような例を**反例** (*counterexample*) という。

(7)，(8) と関連して**背理法** (*reduction to absurdity*) がある。背理法とは，仮定 (P) と結論の否定 ($\neg Q$) から矛盾 [(4)] を導くことで，$P \implies Q$ を証明する論法である。

演習問題 1.2　真理値表を書くことにより命題 1.1 を証明せよ。

日常生活に関する叙述の対偶では時間などが逆転するため，一見するとおかしな対偶命題になることがある。このような場合，時間逆転等を考慮して表現を修正すると自然に見える対偶命題をつくることができる。

演習問題 1.3　次の命題 (?) の対偶命題をつくれ。
(1) 彼は怒られないと勉強しない。
(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

[(4)] ある論理体系が**矛盾** (*contradiction*) を含むというのは，ある命題 X に対し，その命題と否定命題の両方，即ち $X \land \neg X$ が証明されることをいう。