数学序論要綱 ♯7

3　複素平面とオイラーの公式

3.1　複素数の四則

2 次方程式

$$x^2 = -1 \tag{1}$$

は実数解を持たない。2 乗して負になる数は，実数には存在しないからである。2 次方程式 (1) が解を持つようにするためには，2 乗して -1 となる数の導入が必要である [(1)]。$i^2 = -1$ となる数を i で表し，**虚数単位**と呼ぶ。一般に

$$\alpha = a + bi \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

の形で表される数を**複素数**と呼ぶ。複素数 α に対し a, b をそれぞれ，複素数 α の**実部**，**虚部**と呼び，

$$a = \mathrm{Re}(\alpha), \qquad b = \mathrm{Im}(\alpha)$$

で表す。また，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。すなわち，

$$\mathbb{C} = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$$

となる。虚部が 0 の複素数 ($b = 0$) は，実数であるから，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ の部分集合となっている。

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ を係数に持つ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となり，必ず複素数の範囲に解を持つ。

では，複素数 $a_n, \cdots a_0$ に対し方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{2}$$

の解を考えるとき，さらなる数の拡張が必要となるのであろうか？この問いに対して，次の定理が成り立つ：

(1) 歴史的には複素数は 2 次方程式の解からではなく，3 次方程式の解の公式から考えられるに到った。この事はこの節の最後で説明する。

定理 3.1 [代数学の基本定理] n 次方程式 (2) は，いつでも n 個 (k 重解は k 個と数える) の解を複素数の範囲に持つ。

この定理により，高次の方程式を考えても，数の範囲を拡張する必要はないのである。すなわち，方程式を考える限り，複素数で十分であることが解る。

2 つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}$ が等しいとは，次が成り立つことである：

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, \quad b = d$$

特に，

$$\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0, \quad b = 0$$

である。

複素数の四則演算は，$i^2 = -1$ に注意すれば，実数の場合と変わらない。加法，減法，乗法，除法は i を単なる文字だと考え，i^2 が出てきたら -1 に変えればよい。即ち

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

特に，$c + di$ の逆数は，

$$\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$$

である。

演習問題 3.1　次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$　　(2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$　　(4) $\dfrac{1}{5-2i}$

複素数の誕生：歴史の話なので気楽に聞いて下さい。以下文字を小さい文字にする。3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ のカルダノの解法はカルダノ自身が発見したものではないが

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

というものである。これには「還元不能」と呼ばれる場合があった。

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

となる場合である。

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

を例にとる。この方程式が $x = 4$ を解にもつことは，代入することにより確かめられる。ところがカルダノの公式では $p = -15, q = -4$ なので

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3 = -121 < 0$$

となり還元不能な場合になる。解は形式的に計算すると

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

となる。

還元不能の場合公式が適用できないとする考え方もあるが，今で言う複素数を想像上の数として導入して考えた人がいた (例えば Bombelli)。このように考えると「還元不能」な場合でも公式が適用できる。$i^2 = -1$ となる数を導入すると

$$\sqrt{-121} = \sqrt{i^2 121} = \sqrt{(11i)^2} = 11i$$

となる。$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + ib$ とおくと

$$2 + 11i = (a + ib)^3 = a(a^2 - 3b^2) + i\left(b(3a^2 - b^2)\right)$$

となり，これは $a = 2, b = 1$ という解を持つ。よって公式から

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2+i)^3} + \sqrt[3]{(2-i)^3} \\ &= 2 + i + 2 - i = 4 \end{aligned}$$

という解が得られる。

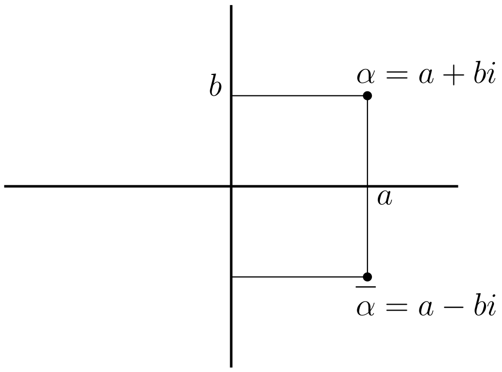
このように始まった複素数であるが，その後色々な所で重要な役割を果たすことが分かって今日に至っている。

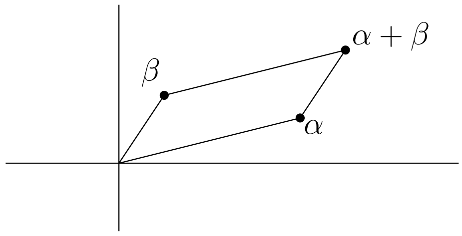
3.2 複素平面

実数の集合は，数直線で幾何学的に表せる。同様に，複素数は 2 つの実数の組で決まるから，平面上の点で表すことが出来る。すなわち，$\alpha = a + bi$ とすると

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \alpha & \longmapsto & (a, b) \end{array}$$

なる写像は全単射であり，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ が同一視出来る。





この平面を**複素平面**または**ガウス平面**と呼び，x 軸, y 軸 をそれぞれ**実軸，虚軸**と呼ぶ。複素数の演算において複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ の和を定めたが，$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の同一視を通して α, β を平面のベクトル $(a, b), (c, d)$ と思う事により，複素数の和 $\alpha + \beta$ は，ベクトルとしての和 $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$ と幾何学的に解釈できる。

共役複素数　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して,

$$\overline{\alpha} = a - bi$$

を α の**共役複素数**と呼ぶ。$\alpha, \overline{\alpha}$ を用いれば，複素数 α の実部，虚部は次のように表せる：

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

複素平面で考えると，実軸 (x 軸) に関して対称移動した点に対応するのが共役複素数である。複素数の共役に対して，次が成り立つ：

命題 3.2 複素数 α，α_1，α_2 に対して,

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$　　(2) $\overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}$

(3) $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}$　　(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$

が成り立つ。

証明は演習問題とする。

演習問題 3.2　命題 3.2 を証明せよ。

絶対値　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して,

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

であるから，その平方根を α の**絶対値**と呼ぶ：

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$$

よって α の逆数は

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}$$

となる。

　複素平面において，原点 O から $\alpha = a + bi$ までの距離を r とおくと，ピタゴラスの定理より

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$$

が成り立つ。すなわち，複素数 α の絶対値は，幾何学的にはベクトル α の**長さ**を表している。また，2 点 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ の距離は，$\alpha - \beta$ の絶対値で与えられる。すなわち

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

が成立する (図 3.1 参照)。

演習問題 3.3　次の問に答えよ。
(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

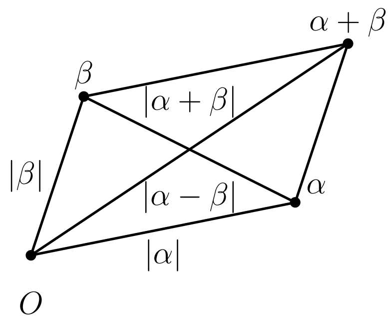


図 3.1

　さて，2 点間の距離に関して次の定理が成り立つ：

定理 3.3 [三角不等式]　複素数 α, β に対して，次の不等式が成り立つ：

(1) $|\alpha + \beta| \ \leq \ |\alpha| + |\beta|$
(2) $|\alpha| - |\beta| \ \leq \ |\alpha - \beta|$

演習問題 3.4　図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。