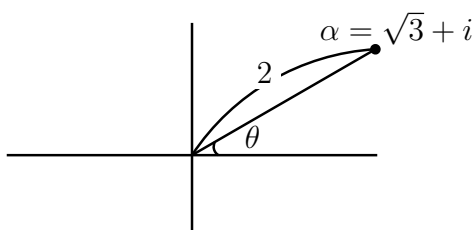


3.3 複素数の極形式とオイラーの公式

ここでは、複素数に対する極形式、オイラーの公式を与え、複素数の積の幾何学的意味を考える。

まず例から始めよう。ℂと複素平面の同一視の下で、複素数 $\alpha = \sqrt{3} + i$ の表す平面内の点 α を考える。 α と実軸の正の向きとがなす角を θ とし (今の場合 $\theta = \frac{\pi}{6}$)、 $\sqrt{3} + i$ を α の絶対値と θ で表してみると次の図の様になる：



$$|\alpha| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\sqrt{3} + i = 2 \cos \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

と表すことができる。この表示を極形式という。

一般の場合を考えよう。複素数 $\alpha = a + bi$ に対して、ベクトル α と実軸の正の向きとが作る角を θ とおく。このとき、 θ の範囲は、

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

の範囲で唯1つ定まる ($0 \leq \theta < 2\pi$ という制限をつけなければ θ の選び方には $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) だけの不定性があることに注意する)。ベクトル α の長さを r とすると

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r} \iff a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

が成り立っている。従って、

$$\alpha = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

を得る。この複素数の長さ (絶対値) 及び角度 θ を用いた表示を $\alpha = a + bi$ の極形式という。 θ を $\alpha = a + bi$ の偏角と呼び、 α の偏角を

$\arg \alpha$ と書く。ただし, α から $\arg \alpha$ が一意的に決まるものでないことは注意しておく。

演習問題 3.5 次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。

- (1) $1 + i\sqrt{3}$ (2) -2 (3) i (4) $2\sqrt{3} - 2i$ (5) $1 - \sqrt{3}i$

虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ を, 天下り的に次の式で定める:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

これをオイラーの公式⁽¹⁾と呼ぶ。この公式が何故成立するかに関しては解析学 I で学ぶが, ここでは成立するものとして議論を進める。

e^X において X が複雑な式になる場合もある。そのときは

$$\exp X = e^X$$

という表示をすることもある。例えば正規分布は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

などと書かれる。

オイラーの公式において, θ を $-\theta$ に置き換え, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ を用いると

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

が得られることに注意する。

演習問題 3.6 次の問に答えよ。

- (1) $e^{i\theta}$ は, 原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
 (2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数 $e^{i\theta}$ に対しても実数の指数関数 e^x と同様に指数法則が成り立つのか気になるが, 次の定理が成り立つ:

定理 3.4 虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ に対して指数法則が成り立つ:

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

⁽¹⁾オイラーの公式と呼ばれるものは沢山あって, 一般の場合「オイラーの公式」といってもどれを指すか不明確だが, 数学序論および解析学 I, II ではこの公式を指すものと約束する。

証明 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

となり指数法則が成立している。■

注意 3.5 [指数法則 = 加法定理] この定理の逆, すなわち, 指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則を仮定することにより, 三角関数の加法定理が証明できる。実際, オイラーの公式より

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \end{aligned}$$

であり一方,

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

なので, 指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則 ($e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$) より三角関数の加法定理を得る。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.6 [ド・モアブルの公式] 自然数 n に対して,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

が成り立つ。

証明 定理 3.4 において, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば, $(e^{i\theta})^2 = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}$ が成り立つ。さらに定理 3.4 を適用すれば,

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2 \cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta} e^{i\theta} = e^{i3\theta}$$

を得る。以下, 同様にして任意の自然数 n に対して, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ が成り立つことが分かる。(きちんと示すには数学的帰納法を用いる。演習問題 3.7 参照)。■

演習問題 3.7 次の問に答えよ。

- (1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
- (2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.7 複素数 α, β に関し次が成立する。

$$(1) |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$(2) \arg(\alpha\beta) = \arg \alpha + \arg \beta$$

証明 $\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, \beta = r_2 e^{i\theta_2}$ と表されているとする。このとき

$$\alpha\beta = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

となる。 $|\alpha\beta| = r_1 r_2 = |\alpha| \cdot |\beta|$ であり, $\arg(\alpha\beta) = \theta_1 + \theta_2 = \arg \alpha + \arg \beta$ となる。■

(1) はすでに演習問題 3.3 で扱っている。偏角に関しては注意が必要である。偏角は一意的に決まらない。 α の偏角と β の偏角を定めたとき, $\alpha\beta$ の偏角で $\arg \alpha + \arg \beta$ になるものが存在するということである。 $\alpha, \beta, \alpha\beta$ の偏角をたとえば 0 と 2π の間にとったときは一般に成立しない。

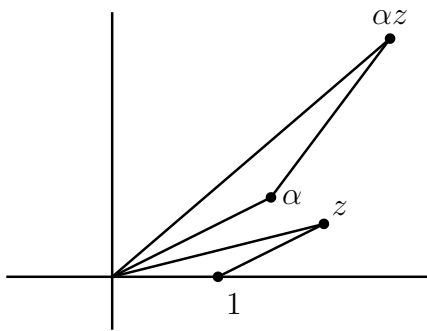


図 3.2

複素数の極形式の話に戻ろう。複素数 $\alpha = a + ib$ の絶対値を r , 偏角を θ とする。オイラーの公式を用いると極形式は, 次の様書き直せる:

$$\alpha = a + ib = r e^{i\theta}$$

これもまた複素数 α の極形式と呼ぶ。ここで,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha| \quad \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

であった。この極形式を用いて, 複素数の積の幾何学的意味を理解しよう。

$$\alpha = r_0 e^{i\lambda}, \quad z = r e^{i\theta}$$

とおく。

複素数をベクトルと見なすと, ベクトル α は長さが r_0 で実軸の正の向きとの成す角が λ のベクトル, z は長さが r で実軸の正の向きとの成す角が θ であるベクトルである。このとき, 複素数としての積は,

$$\alpha z = r_0 e^{i\lambda} r e^{i\theta} = r_0 r e^{i(\lambda + \theta)}$$

であるから, ベクトル z は, 複素数 α を掛けることにより, 長さが r_0 倍, 実軸の正の向きから λ だけ回転されたベクトル αz に変換された。これが複素数の積の幾何学的意味である。とくに, $r_0 = 1$ のとき, αz は z を λ だけ反時計回りに回転させたベクトルである。

を得る。これより、方程式 $z^n = 1$ の解は、

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\ \exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \\ &\dots \\ \exp\left(\frac{2(n-1)\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \exp\left(\frac{2\pi ni}{n}\right) &= 1\end{aligned}$$

の n 個である。

演習問題 3.9

- (1) 1 の 4 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (2) 1 の 3 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (3) 1 の 6 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (4) 1 の 5 乗根を求め、複素平面に図示せよ。

演習問題 3.10 $z = e^{2i}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) z, z^2, z^3, z^4 を複素平面に図示せよ。
- (2) 異なる自然数 m, n に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし π が有理数でないことは既知としてよい。

演習問題 3.11

- (1) $z = e^{i\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{1}{2}\right)$ とする。 z, z^2, z^3, z^4 を図示せよ。
- (2) n を自然数とし、 $z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\frac{1}{n}\right)$ とする。 z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とするとき $a > 0, b > 0$ である。 z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。 z^4, z^5, \dots と順に次々に計算して行ったとき、 z^{29} までは第 1 象限にあり、 z^{30} で初めて第 2 象限となった。 n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。