数学序論要綱 $\sharp 12$

5　微分法

微分法の最初に数列及び関数の極限に関し簡単に復習しておく。高校で数学 III をやっていない人にとっては初めて学ぶ内容が多いかもしれないが，不十分点は自分で補うこと。

5.1　数列の極限

各自然数 n に対し，数 a_n が定められているとき $\{a_n\}$ を**無限数列**という (以下単に**数列**という)。言い替えれば数列とは自然数全体のなす集合 $\mathbb{N}$ から実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ への写像のことである。

n を大きくして行くとき，a_n がある一定の値 α に限りなく近づくとする。このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する** (1) といい，α をその**極限値**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

あるいは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書く。$\{a_n\}$ が収束しないとき，**発散する**という。発散するとき，$n \to \infty$ のときの a_n の挙動は様々であるが，特に $a_n \to \infty$ あるいは $a_n \to -\infty$ となるとき，$\pm\infty$ は数ではないが，便宜的に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 5.1 (1)　$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，即ち

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

となる数列を考える。$n \to \infty$ としたとき，$\dfrac{1}{n}$ は 0 に近づく。即ち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

---

(1) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には下記の「ε–N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。次が ε–N 論法による定義である。数列 a_n が次を満たすとき「数列 a_n は α に収束する」といい，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く；$\forall\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する。

が成立する。
(2) $a_n = n^2$ とおくと a_n は収束しないが，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

である。$b_n = -n(n+1)$ とおくと b_n は収束しないが，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

である。
(3) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とおくと a_n は収束しない。また $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ も成立しない。
(4) a を実数とする。$a_n = a^n$ とおくとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ の収束・発散は，指数関数の所で学んだように，a の値によって異なり，次のようになっている [2]。

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \quad (\text{発散}) & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{発散} & a \leq -1 \end{cases}$$

定理 5.2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (ka_n) = k\alpha = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (ただし $\beta \neq 0$ とする。)

が成立する。

定理 5.2 のきちんとした証明のためには「ε–N 論法」が必要になるので，証明は星印付きの演習問題とする。

演習問題 *5.1 定理 5.2 を証明せよ。

---

[2] 指数関数を定義したときは $a > 0$ とした。指数が有理数の場合はその制限をつけなければべき乗が定義できなかった。今の場合指数が自然数なので，a が 0 以下の場合もべき乗を定義できる。

この定理により，数列の各項がいくつかの代数的結合 (和・差・積) で表されるときは，その各々の極限値がわかれば容易にその極限値は求まる。しかし (4) において，$a_n, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる場合や，a_n, b_n が $\pm\infty$ に発散する場合は $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ は形式的には $\dfrac{0}{0}$ や $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ となり，値が定まらないように見える (実際には収束する場合も発散する場合もある)。このような場合を**不定型**という。微積分においては不定型の極限を求めることは大切である。

例 5.3 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ を求めよ。

分母，分子ともに n で割ると

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+1} \times \dfrac{1}{n}}{(n+2) \times \dfrac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{2}{n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = 1$$

である。

ここで用いた方法を反省してみよう。分母において n は最も増大度が大きい項である。その項で分子および分母を割っても分数は変化せず，分母は収束する形に変形される。このとき分子が収束すれば，定理 5.2 の商の公式を用いることができる。

> 分母の増大度最大 (多項式なら最高次数) のもので，分母と分子を割る

演習問題 5.2　次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1}$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{n^3+n+1}$　　(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^6+n^4+1}}{n^2+5}$　　(6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n-1}$

よく分からない数列を知られた数列ではさむことにより数列の極限を求める方法が知られている。次の定理がそれである。

定理 5.4 [**はさみうちの定理**] 任意の自然数 n に対し

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

が成立しているとする。$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ のとき a_n も収束し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

が成立する。

$b_n < a_n$ が成立していても $\lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} a_n$ とはならず，$\lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n$ となることを注意しておく。

演習問題 ***5.3**　定理 5.4 を証明せよ。

例 5.5 $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ とするとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ をはさみうちの定理を用いて求める。

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

より

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

が成立する。$b_n = -\dfrac{1}{n}, c_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと $b_n \leq a_n \leq c_n$ が成立している。$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ なのではさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が得られる。

例 5.6 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0\ (a > 0)$ を示せ。

$N > a$ となる自然数 N を 1 つ選んで固定する。$n > N$ とする。$k > N$ のとき $\dfrac{a}{k} < \dfrac{a}{N}$ が成立することに注意すると

$$\begin{aligned}
0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{n} \\
&< \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\underbrace{\frac{a}{N}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{N}}_{n-N+1\text{ 個}} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}
\end{aligned}$$

という不等式が成立する。ここで $b_n = 0$，$c_n = \dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{N-1}\left(\dfrac{a}{N}\right)^{n-N+1}$ と定義し，これに定理 5.4 を適用する。$0 < \dfrac{a}{N} < 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{N}\right)^{n-N+1} = 0$ となる。よって $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ が得られる。∎

この例は 指数関数 a^n $(a > 1)$ の増大度より，$n!$ の増大度の方がさらに大きいことを意味する。

演習問題 5.4　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n}$ (k は自然数)

ヒント: 2 項定理 $(1+h)^n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}{}_nC_ih^i$ を用いて，$2^n, 3^n$ より小さい n の多項式を見つける。

> 演習問題は 多項式関数 n^k の増大度より，指数関数の増大度の方が大きいことを意味する。

$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$ の形の不定型の他の不定型の極限としては $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ のように $\infty-\infty$ の形などもある。

例 5.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-n&=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\to\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(注：$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形に変形してもとめた)

演習問題 5.5　次を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)$

ここで指数関数の微分において重要な次の数列の極限を考える。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

とすると $\{a_n\}$ は収束する (星印付の演習問題とする)。その極限値を e と定める。

> $$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e は**自然対数の底**と呼ばれる重要な定数である。e は無理数であり，

$$e = 2.7182818 \cdots$$

と近似されることが知られている [3]。

演習問題 *5.6　「単調増加数列 $\{a_n\}$ の各項がすべてある定数 K より小であるならば数列は収束する」という定理は知られているものとする。次の順で数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示せ。

(1) 任意の自然数 n に対し $a_n \leq 3$ であることを示せ。

(2) a_n が単調増加，即ち任意の自然数 n に対し $a_n \leq a_{n+1}$ が成立することを示せ。

自然対数の底 e は

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{2}$$

と無限級数で表されることを解析学 I で学ぶ。

数列 (1) は収束が非常に遅く，数列 (2) は非常に早い。このことは演習問題 5.7 を計算することにより実感してほしい。

注：無限級数

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

とは，部分和，$S_0 = 1, S_1 = 1+\dfrac{1}{1!}, S_2 = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}, \ldots, S_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}, \ldots$ で定まる数列 $\{S_n\}$ の極限値を意味する。

演習問題 5.7　電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10} = \left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}, a_{100} = \left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}, a_{1000} = \left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

例 5.8 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e\cdot 1 = e \quad (n\to\infty)$$

演習問題 5.8　次を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

[3] 後期の解析学 I でこの近似計算を扱う。

5.2　関数の極限

変数 x が a に (a と異なる値をとりながら) 限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

と書き，$x \to a$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という [(1)]。また A を $x \to a$ としたときの $f(x)$ の**極限値**という。

$x \to a$ のとき $f(x)$ の値が $\pm\infty$ となるとき $\pm\infty$ は数ではないが

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

と書くのは数列の場合と同様である。

変数 x が $x > a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

と書き，$x \to a+0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x \to a+0$ としたときの $f(x)$ の**右側極限値**という。

変数 x が $x < a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

と書き，$x \to a-0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x \to a-0$ としたときの $f(x)$ の**左側極限値**という。$a = 0$ のとき $x \to 0+0$ を $x \to +0$ と $x \to 0-0$ を $x \to -0$ と書くことが多い。

変数 x が限りなく大きくなるとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

と書き，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という [(2)]。

---

(1) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には下記の「ε–δ 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x \to a$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ と書く；$\forall\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

(2) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε–N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ と書く；$\forall\varepsilon(>0) \in \mathbb{R}\ \exists N(>0) \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x > N \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

変数 x が限りなく小さくなる[(3)]とき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

と書き，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。

例 5.9 関数の極限に関するいくつかの例：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+3) = 4$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\sin x = 0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = 3$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$

数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 5.10 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする (A, B は有限値)。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(kf(x)\Big) = kA = k\lim_{x\to a} f(x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = A \pm B = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$　(ただし $B \neq 0$ とする)

証明は数列の場合と同様にきちんと実行するには「ε–δ 論法」が必要になる。数列のときと同様に証明は星印付きの演習問題にする。

演習問題 ***5.9**　定理 5.10 を証明せよ。

定理 5.11 [はさみうちの定理] a のまわりの任意の x に対し

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

が成立しているとする。$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ のとき，$f(x)$ も収束し，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ が成立する。

[(3)]絶対値が 0 に近づくとき「限りなく小さくなる」と表現する人もいる。この場合は $\displaystyle\lim_{x\to0}$ を意味する。今の場合は $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$ である。紛らわしい場合もあるので注意すること。

演習問題 ***5.10**　定理 5.11 を証明せよ。

$x \to a$ のとき $f(x), g(x) \to 0$ あるいは $f(x), g(x) \to \pm\infty$ となる場合の $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を数列の場合と同様に**不定型**と呼ぶ。数列の場合と同様に形式的には $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ で不定であるが，有限値に収束する場合もある。ここで関数の極限に関しても数列の場合と同様の演習を行う必要があるが，微分の所で扱う「ロピタルの定理」という強力な道具があるので，演習はそのときに行う。

最後に三角関数と指数関数の微分の基礎となる 2 つの極限値を紹介しておく。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{変数 } x \text{ はラジアンとする}) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{2}$$

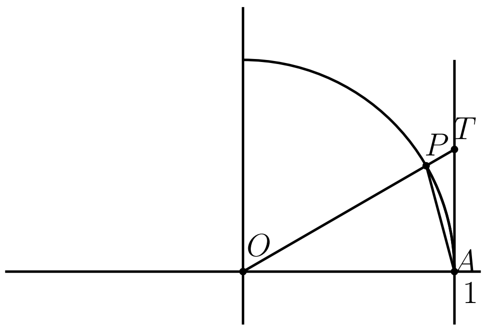

図 5.1

演習問題 5.11

(1) 図 5.1 を参考にして三角形と扇型の面積を比較することにより，$x > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(2) $x = -t$ とおくことにより $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(1)，(2) より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が示される。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ を示せ。

(6) $x = \log_e(1+u)$ とおくことにより $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ を示せ。

演習問題 5.12 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の成立を仮定して次を示せ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$