数学序論要綱 $\sharp$14

5.5　接線と法線の方程式

区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ のグラフを考える。f のグラフ G_f とは

$$G_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in I \,\}$$

であった。$a \in I$ とすると点 $(a, f(a))$ はグラフ上にある。

この点を通り，このグラフに接している直線の方程式を考える。このような直線を，この点における関数 $y = f(x)$ の**接線**という。この直線は点 $(a, f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ であるので，その方程式は

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

となる。

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ を通り，このグラフの接線に直交する直線を考える。このような直線を，この点における関数 $y = f(x)$ の**法線**という。

この直線は点 $(a, f(a))$ を通り，傾きが $-\dfrac{1}{f'(a)}$ であるので，その方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

となる。このような表示では，当然 $f'(a) \neq 0$ でなければならない。しかし，両辺に $f'(a)$ をかけることにより，

$$x + f'(a)y - (a + f'(a)f(a)) = 0$$

となる。この表示の場合は $f'(a) = 0$ でも問題はない。そのときは方程式は $x - a = 0$ となる。

次の命題は接線を特徴付けるもので有用である。

命題 5.18 直線 $y = mx + n$ は $y = f(x)$ の接線である必要十分条件は方程式 $f(x) = mx + n$ が重解を持つことである。

この命題の証明のため補題を1つ用意する。

補題 5.19 多項式 $f(x)$ が $(x - a)^2$ で割り切れる

$$\iff f(a) = 0, f'(a) = 0$$

証明　$f(x)$ が $(x - a)^2$ で割り切れるときある多項式 $g(x)$ を用いて $f(x) = (x - a)^2 g(x)$ と書ける。このとき $f(a) = 0$ である。また

$$f'(x) = 2(x - a)g(x) + (x - a)^2 g'(x)$$

なので $f'(a) = 0$ となる。

逆に $f(a) = 0, f'(a) = 0$ のとき $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余りを $Ax + B$ とおくとある多項式が存在して

$$f(x) = (x-a)^2 g(x) + Ax + B$$

と書ける。$f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x) + A$ なので

$$0 = f(a) = (a-a)^2 g(a) + Aa + B = Aa + B$$
$$0 = f'(a) = 2(a-a)g(a) + (a-a)^2 g'(a) + A = A$$

よって $A = 0, B = 0$ となり $f(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる。 ∎

命題 5.18 の証明： $F(x) = f(x) - (mx + n)$ とおく。$y - mx + n$ が $y = f(x)$ の接線であるとする。このとき接点を $(a, f(a))$ とすると $m = f'(a), n = f(a) - f'(a)a$ である。このとき

$$F(x) = f(x) - f'(a)x - f(a) - f'(a)a$$

となっているので

$$F'(a) = f'(x) - f'(a)$$

となる。このとき $F(a) = 0, F'(a) = 0$ となるので補題より $F(x)$ は重解を持つ。

$F(x)$ が a を重解に持つとする。このとき補題より $F(a) = 0, F'(a) = 0$ が成立している。$F'(x) = f'(x) - m$ より

$$0 = F(a) = f(a) - (ma + n)$$
$$0 = F'(a) = f'(a) - m$$

よって $m = f'(a), n = f(a) - f'(a)a$ となるので

$$mx + n = f'(a)(x - a) + f(a)$$

となる。よって $y = mx + n$ は接線である。

演習問題 5.23

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。$(1, 3)$ における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。

(2) 原点を通る直線が $y = f(x) = x^2 + x + 1$ に接している。このときこの直線の方程式を求めよ。

(3) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し，$y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ。

(4) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で，線分 PQ に平行となるのは，どの点における接線か？ その点の x 座標の値を求めよ。

(5) 直線 $y = mx + 1$ が $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$ に接しているとき m を求めよ。
(6) 直線 $y = mx + n$ が $y = f(x)$ に異なる 2 点で接しているとき複接線という。$y = f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ の複接線を求めよ。

5.6 増減表と関数のグラフ

定義 5.20 (1) f を微分可能関数とする。$f'(c) = 0$ となる点 c を f の **臨界点** という。

(2) 点 c がその近くの任意の x に対して $f(x) < f(c)$ となるとき**極大点**という [(1)]。

(3) 点 c がその近くの任意の x に対して $f(x) > f(c)$ となるとき**極小点**という。極大点と極小点をあわせて**極点**と呼ぶ。あまり一般的な言葉ではないがこの講義では使用することにする。

(4) f が次の性質をもつとき，f は I で増加の状態にあるという；任意の $x_1, x_2 \in I$ について，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$。

(5) f が次の性質をもつとき，f は I で減少の状態にあるという；任意の $x_1, x_2 \in I$ について，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$。

命題 5.21 f を微分可能な関数とする。

(1) 極点ならば臨界点である。

(2) $(\,a,\,b\,)$ で $f'(x) > 0$ なら $[\,a,\,b\,]$ で増加の状態にある。また，$(\,a,\,b\,)$ で $f'(x) < 0$ なら $[\,a,\,b\,]$ で減少の状態にある。

演習問題 5.24 命題 5.21 を証明せよ。ただし (2) の証明には平均値の定理と呼ばれる次の定理を用いてよい。f が $(\,a,\,b\,)$ で微分可能であり，$[\,a,\,b\,]$ で連続のとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

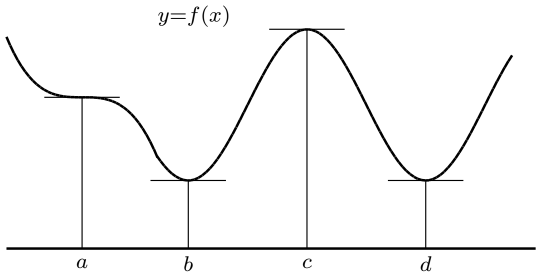
となる c $(a < c < b)$ が存在する。

命題 5.21 より，臨界点を求め，それらで挟まれる区間における導関数の値の正負を調べることにより，関数のグラフの概形を描くことができる。導関数の値や関数値の増減を一覧表にしたものを，その関数の **増減表** という。

[(1)]「任意と存在」を用いて数学的に厳密に述べると「ある正の数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < f(c)$」である。

関数 $f(x)$ を微分して $f'(x)$ を求め，$f'(x)=0$ となる x を調べたところ $x=a,b,c,d$ $(a<b<c<d)$ になったとする。$a<x<b$ 等間の $f'(x)$ の符号を調べ次のようになったとする。このとき次の様な増減表を書くことができ，グラフの概形を描くことができる。

x		a		b		c		d	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$



例 5.22 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

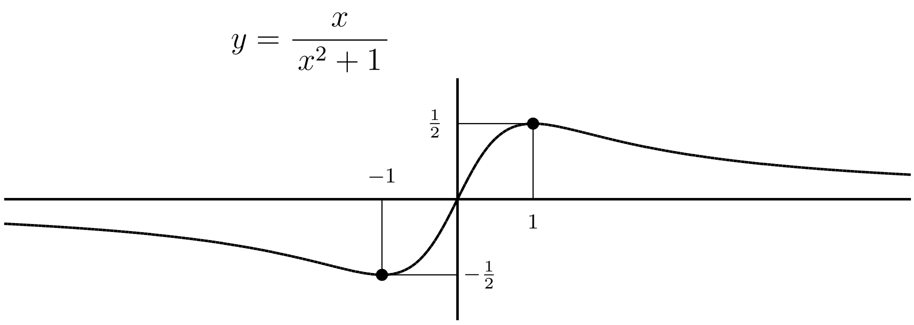
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'\frac{1}{x^2+1}+x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{1}{x^2+1}+\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

であるから，臨界点は $x=\pm1$ である。$f'(-2)=-\dfrac{3}{25}<0$，$f'(0)=1>0$，$f'(2)=-\dfrac{3}{25}<0$，$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ より，増減表を作ると,

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

となり，-1 は極小点，1 は極大点であることがわかる。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると，グラフの概形は次のようになることがわかる。



演習問題 5.25　以下の関数のグラフの概形を描け。

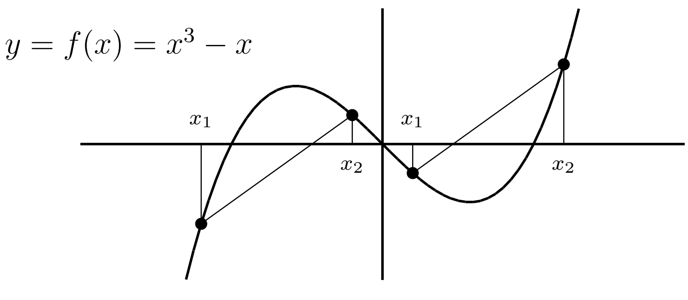
(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$　　(2) $f(x) = xe^{-x}$
(3) $f(x) = x^2 \log x$　　(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$　　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$
(7) $f(x) = x + 2\cos x$　　(8) $f(x) = \sin x(1+\cos x)$
(9) $f(x) = x^{-x^2}$

関数のグラフの凹凸を調べることで，もう少し正確に概形を描くことができる。関数 $y = f(x)$ がある区間 $[\,a,\,b\,]$ で**下に凸**であるとは次で定義される；$x_1 < x_2$ を満たす任意の $x_1, x_2 \in [\,a,\,b\,]$ に対し，$(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の下に関数 $y = f(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。

次図では b を任意の正の実数すると関数 $y = f(x)$ は $[\,0,\,b\,]$ で下に凸である ($[\,0,\,\infty\,)$ で下に凸ともいう)。



関数 $y = f(x)$ がある区間 $[\,a,\,b\,]$ で**上に凸**であるとは次で定義される；$x_1 < x_2$ を満たす任意の $x_1, x_2 \in [\,a,\,b\,]$ に対し，$(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の上に関数 $y = f(x)$ $(x_1 < x < x_2)$ のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。

前図では a を任意の負の実数すると関数 $y=f(x)$ は $[\,a,\,0\,]$ で上に凸である ($(\,-\infty,\,0\,]$ で上に凸ともいう)。

次の命題を用いてグラフの凹凸を判断することができる。以下関数 f は必要な回数だけ微分可能とする。

命題 5.23 関数 $y=f(x)$ が $(\,a,\,b\,)$ において $f''(x)>0$ とすると，この区間で関数のグラフは下に凸である。$(\,a,\,b\,)$ において $f''(x)<0$ とすると，この区間で関数のグラフは上に凸である。

演習問題 5.26 $x_1, x_2 \in [\,a,\,b\,]$ に対し

$$F(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)-f(x)$$

とおき，$F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.23 を証明せよ。

グラフの凹凸が変化する点を変曲点という。$f''(c)=0$ であって $f'''(c)\neq 0$ ならば，それは変曲点になる。

演習問題 5.27 $f''(c)=0$ であって $f'''(c)\neq 0$ ならば，変曲点であることを証明せよ。

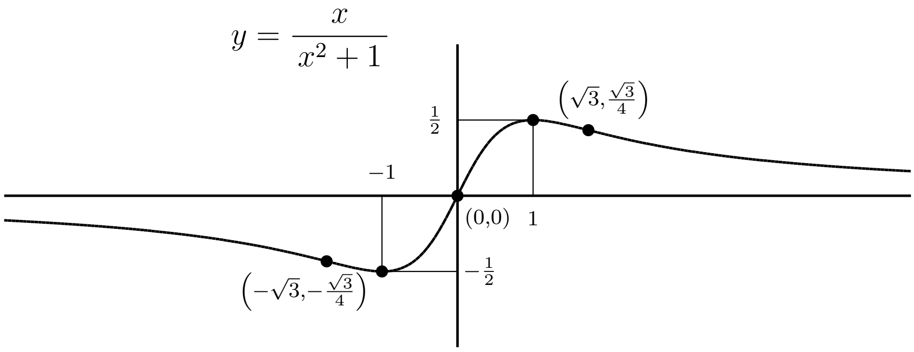
前に描いた $y=f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ を変極点，凹凸にも注意して描こう。$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ をもう一度微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1-x^2\right)'\frac{1}{(x^2+1)^2}+(1-x^2)\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)' \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

となるので，$f''(x)=0$ となるのは $x=0,\pm\sqrt{3}$ である。$f''(x)$ の符号を調べて増減表を書くと次の様になる。ここで $\searrow, \searrow, \nearrow, \nearrow$ はそれぞれ「上に凸かつ減少」「下に凸かつ減少」「上に凸かつ増加」「下に凸かつ増加」を表す。

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\searrow$

変曲点の x 座標は $0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$ である。そのことに考慮してグラフを描くと次図のようになる。実際はコンピュータで計算して描いているので前図と同じであるが，フリーハンドで描くときは正確さが増す。



演習問題 5.28　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $y = (x-5)^4(x+1)^3$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

(3) $y = e^{-x^2}$　　(4) $y = x\log x$

パラメータ表示された曲線の概形

パラメータ表示された曲線の概形を書くというのも大切である。パラメータ表示とは曲線 C が 2 つの関数 $x = x(t), y = y(t)$ によって

$$C = \{\ (x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$$

と表されているときをいう。パラメータ表示されている場合，関数 $x(t), y(t)$ の概形が分かれば，それを組み合わせることにより書くことができる。一般に次の順で行う。

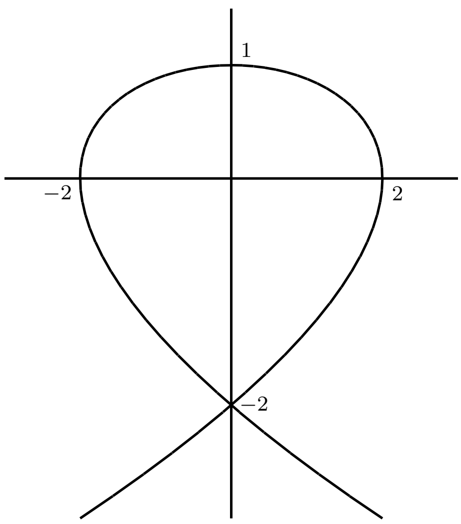
(1)　$x(t)$ の導関数を求め，$x'(t) = 0$ となる t を求める。それを $t_1, \ldots, t_m$ とすると，$t_i < t < t_{i+1}$ での $x'(t)$ の正負を調べる。
(2)　$y(t)$ の導関数を求め，$y'(t) = 0$ となる t を求める。それを $t'_1, \ldots, t'_n$ とすると，$t'_j < t < t'_{j+1}$ での $y'(t)$ の正負を調べる。
(3)　上で調べたことを 1 つの表 (増減表) に書き，曲線の方向を求める。
(4)　$x'(t) = 0$ となる点，$y'(t) = 0$ となる点を求め平面上にプロットする。
(5)　x 軸，y 軸との交点 ($x(t) = 0, y(t) = 0$ となる点) を求め平面上にプロットする。
(6)　その他必要なことがあれば調べる。
(7)　増減表を参考に曲線を描く。

$x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x'(t) = 3 - 3t^2$ より $t = \pm 1$ において $x'(t) = 0$ となる。$y'(t) = -2t$ より $t = 0$ において $y'(t) = 0$ となる。間の正負を調べると増減表は以下の様になっていることが分かる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ である。即ちこの曲線は x 軸と $(2, 0), (-2, 0)$ で交わり，y 軸とは $(0, 1), (0, -2)$ で交わる。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



演習問題 5.29　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = t - 2t^4$

(4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

5.7　不定形の極限とロピタルの定理

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ という形の極限を考える。$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = 0$ あるいは，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ となる場合，これを **不定形の極限** という。

不定形の極限を求める場合，次の定理は有用である。

定理 5.24 [**ロピタルの定理**] f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = 0 = g(a)$ あるいは，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

となるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

証明　a がある実数であって $f(a)=g(a)=0$ の場合について「証明」する。その他の場合の証明はここでは述べない[(1)]。

$x=a+h$ とおくと，$x\to a$ のとき $h\to 0$ となっている。$f(a)=g(a)=0$ に注意すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\frac{h}{g(a+h)-g(a)}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{h}{g(a+h)-g(a)}\\&=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

となり成立している。∎

例 5.25

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \tag{1}$$

を求める (この極限はすでに演習問題で扱っているが，ここではロピタルの定理を用いて求める)。$x=0$ のとき，分母と分子は共に 0 となるので，これは不定形の極限である。分母と分子の関数の導関数で見てみると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$$

となる。ここでもう一度ロピタルの定理を用いると

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

となる。

ただしロピタルの定理を使う**大前提として関数の導関数が知られている**必要がある。定義に基づいて導関数を求める問題にロピタルの定理を使ってはいけないのはこの理由による。

次に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ を求める。これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になっていないので，少し工夫が必要になる。

[(1)] きちんとした証明は解析学 I で述べることにする。

最初に $y = \left(\dfrac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log y$ の極限を求める。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \log y &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\dfrac{\log x}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log\left(\dfrac{\log x}{x}\right)\right)'}{x'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x}\frac{1-\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\log x)'}{(x\log x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x(\log x + 1)} = 0
\end{aligned}$$

となる。ここで $\exp x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \exp x = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\right)$ に注意すると

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \exp(\log y) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \log y\right) = \exp 0 = 1$$

を得る。

演習問題 5.30　以下の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right)$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(10) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{\frac{1}{x}}$　　(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$　　(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$