数学序論問題解説 #1

河野

演習問題 1.1　次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。

(1) $P_1 : 1 \geq 1$

(2) $P_2 : 2^{2015}$ は素数である。

(3) P_3 : 12345 は 3 で割り切れる。

(4) P_4 : 微分可能な関数は連続である。

(5) P_5 : 連続な関数は微分可能である。

(6) P_6 : 数学は難しい。

(7) $P_7 : n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

真であるか偽であるかが確定しているものが命題であった。正しくても間違っていても，確定していれば命題である。

(1)　$1 \geq 1$ は真である事が確定しているので，P_1 は命題である。

$1 \geq 1$ は正しくないと誤解してる人がたまにいるので少し説明しておく。$a \geq b$ の定義は「 $a > b$ または $a = b$ 」である。今の場合 $1 > 1$ が偽であり，$1 = 1$ は真である。「偽または真」は真なので $1 \geq 1$ は正しい命題である。

(2)　素数とは「1 と自分自身以外に約数を持たない自然数」である (1 は素数ではないので正確には「約数を 2 個持つ自然数」が定義である)。2 は $2 \neq 1$ かつ $2 \neq 2^{2015}$ であり，2 は 2^{2015} を割りきる。2 は 2^{2015} の約数なので，2^{2015} の約数は少なくとも 3 個 $(1,2,2^{2015})$ ある。よって 2^{2015} は素数ではない。P_2 は偽であることが確定している。よって P_2 は命題である。

(3)　P_3 は正しい命題である。「$1+2+3+4+5 = 15$ が 3 で割り切れるので」という判定法を知っている人もいるだろう。

(4)　高校時代数学 3 で扱っただろうし，後期解析学 I で学ぶが，P_4 は正しい命題である。

(5)　$y = f(x) = |x|$ は連続だが，$x = 0$ で微分可能ではない。よって P_5 は間違った命題である。

(6)　多くの人には正しい命題と思われるかもしれないが，P_6 は命題でない。

(7)　$3^2 + 4^2 = 5^2$ なので P_7 は間違った命題である。似ているようだが「 自然数 $n \geq 3$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。」は 350 年以上未解決で 20 年ほど前に正しいことが分かった命題である。未解決のときは「フェルマー予想」または「フェルマーの最終定理」と呼ばれていた。解決以降は「フェルマー・ワイルスの定理」と呼ばれている。

演習問題 1.2　真理表を書くことにより命題 1.1 を証明せよ。

(1)　真理表は

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

となる。P と $\neg(\neg P)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

これは演習問題直前の「真理値表の対応する欄の真理値が等しいならば同値である」という注意に基づいた解答である。定義に基づいた解答は次の様になる。

真理値表は となる。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \implies \neg(\neg P)$	$P \Longleftarrow \neg(\neg P)$
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T

$P \implies \neg(\neg P)$ は常に正しい，恒真命題であり，$P \Longleftarrow \neg(\neg P)$ も恒真命題なので 2 つは同値である。

(2)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

となる。

$P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(3)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

となる。

$P \vee (Q \wedge R)$ と $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(4)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

となる。

$\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(5)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

となる。

$\neg(P \vee Q)$ と $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(6)

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

となる。

$P \implies Q$ と $\neg P \vee Q$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(7)

P	Q	$P \implies Q$	$\neg(P \implies Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

となる。

$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。
問題は「真理表を用いて」とあるので真理表を用いたが，この段階になると，すでに証明した (1) および (5)，(6) を用いて次のような証明も可能である。かもしれない。

$$
\begin{aligned}
\neg(P \implies Q) &\equiv \neg\,(\neg P \vee Q) && \text{(6) を使用} \\
&\equiv \neg(\neg P) \wedge (\neg Q) && \text{(5) を使用} \\
&\equiv P \wedge \neg Q && \text{(1) を使用}
\end{aligned}
$$

(8)

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

となる。

$P \implies Q$ と $\neg Q \implies \neg P$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。
すでに証明したことを使用する次の様な証明もある。(6) より $P \implies Q \equiv \neg P \vee Q$ である。同様に $\neg Q \implies \neg P \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P \equiv Q \vee \neg P$ となる。明示的には言ってはいなかったが $P \vee Q \equiv Q \vee P$(これを交換法則と呼ぶ) が成立する。$\neg P \vee Q \equiv Q \vee \neg P$ なので (8) が示される。

演習問題 1.3　次の命題 (?) 対偶命題をつくれ。
(1) 彼は怒られないと勉強しない。
(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

(1)　単純に対偶を作ると「勉強するなら怒られる」となる。勉強している時点と怒られた時点の時間の関係を考えると怒られた方が過去であることに注意して，時間の逆転も考慮に入れると，「彼

が勉強していれば，その前に必ず怒られている」となる。
(2)　これも単純に対偶を作ると,「合格するなら，勉強する」となるが，時間の逆転に注意すると，「合格した人は勉強した人」となる。