

演習問題 3.1 次の計算をせよ。

(1) $(3 + 5i) + (4 - 7i)$

(2) $(2 + 3i)(3 - 4i)$

(3) $\frac{5 + 3i}{1 + 2i}$

(4) $\frac{1}{5 - 2i}$

(1) $7 - 2i$

(2) $18 + i$

(3) $\frac{5 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(5 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$

(4) $\frac{1}{5 - 2i} = \frac{5 + 2i}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$

演習問題 3.2 命題 3.2 を証明せよ。

$\alpha = a + bi$, $\alpha_1 = a_1 + b_1i$, $\alpha_2 = a_2 + b_2i$ とおく。

(1) $\bar{\alpha} = a - bi = a + (-b)i$ なので, $\overline{\bar{\alpha}} = a - (-b)i = a + bi = \alpha$ となる。

(2) $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ なので

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= a_1 - b_1i + a_2 - b_2i \\ &= \overline{a_1 + b_1i} + \overline{a_2 + b_2i} \\ &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \end{aligned}$$

(3) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

であるが,

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2$ が成立する。

(4)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} = \frac{a_1 - b_1i}{a_2 - b_2i} = \frac{(a_1 - b_1i)(a_2 + b_2i)}{(a_2 - b_2i)(a_2 + b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 3.3 次の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。

(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

(1) $\alpha = a_1 + a_2i$ とおくと $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ なので

$$\alpha = 0 \iff a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0 \iff a_1^2 + a_2^2 = 0 \iff |\alpha| = 0$$

となり成立する。

(2) $\alpha = a_1 + b_1i, \beta = a_2 + b_2i$ とおくと

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

なので

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta|^2 &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (|\alpha||\beta|)^2 \end{aligned}$$

となる。 $|\alpha \cdot \beta| \geq 0, |\alpha| \geq 0, |\beta| \geq 0$ より $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ となる。

共役複素数を用いる別解もある。紹介しておこう。 $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}, |\beta|^2 = \beta\bar{\beta}$ なので

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (\alpha\beta)\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

あとは前と同様である。

演習問題 3.4 図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。

ここでは幾何的方法と代数的方法の 2 つを紹介しておく。最初は幾何的方法である。

三角形の 3 辺の長さを a, b, c とすると

$$a < b + c$$

が成立する。この式も三角不等式と呼ばれるが、定理の式との区別のためここでは仮に幾何的三角不等式と呼んでおく。

(1) $O, \alpha, \alpha + \beta$ を直線で結んだ図形を考える。これが3角形になっている場合を最初に考える。この3角形の3辺の長さは $|\alpha|, |\beta|, |\alpha + \beta|$ なので幾何的三角不等式より

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$$

が成立する。

次に $O, \alpha, \alpha + \beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならない場合を考える。最初に $\alpha = 0$ のとき。このときは

$$|\alpha + \beta| = |0 + \beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\alpha| + |\beta|$$

となり等号が成立している。 $\beta = 0$ の場合も同様である。

$\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ で $O, \alpha, \alpha + \beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならないのは O, α, β が一直線に並ぶときのみである。このときは実数 t が存在して $\beta = t\alpha$ と書けている。実数 t に対しては

$$|1 + t| \leq 1 + |t|$$

が成立している。このとき

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= |\alpha + t\alpha| = |\alpha(1 + t)| = |\alpha||1 + t| \\ &\leq |\alpha|(1 + |t|) = |\alpha| + |\alpha||t| \\ &= |\alpha| + |t\alpha| = |\alpha| + |\beta| \end{aligned}$$

となる。以上より不等式の成立が示される。

(2) $\gamma = \alpha - \beta$ とおいて β, γ に (1) の不等式を適用すると

$$|\beta + \gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$$

が成立する。 $\beta + \gamma = \alpha$ なので移項すると (2) 式の成立が分かる。

次に代数的証明を紹介する。シュワルツの不等式は既知とする (問題解説の後で証明を述べる)。シュワルツの不等式とは実数 a, b, c, d に対し

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

が成立するというものである。

$\alpha = a + ib, \beta = c + id$ とおくと $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$ なので

$$|\alpha + \beta|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2, \quad |\alpha|^2 = a^2 + b^2, \quad |\beta|^2 = c^2 + d^2$$

となっている。シュワルツの不等式: $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ を用いると

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(ac + bd) + c^2 + d^2 \\ &\leq |\alpha|^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + |\beta|^2 \\ &= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \end{aligned}$$

となる。 $|\alpha + \beta| \geq 0$ なので

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

を得る。証明した式において $\alpha \rightarrow \alpha - \beta$ という置き換えを行うと (2) の式が得られる。

シュワルツの不等式を証明しよう。

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) \\ &= a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = (ad - bc)^2 \geq 0\end{aligned}$$

より

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

が成立する。

一般のシュワルツの不等式は次の形である。

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

前と同様の計算で証明もできるが、ここでは2次方程式の判別式を用いる方法の証明を紹介する。

各 i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対し

$$a_i^2x^2 + 2a_ib_ix + b_i^2 = (a_ix + b_i)^2 \geq 0 \quad (1)$$

が成立する。式 (1) を $i = 1$ から n まで加えると

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq 0 \quad (2)$$

が成立する。(2) の左辺 = 0 という2次方程式の判別式を D とすると $D \leq 0$ である。

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

より成立が示される。