数学序論問題解説 $\sharp 9$

河野

演習問題 4.1　次を証明せよ。

(1) $f(x), g(x)$ が偶関数のとき $f(x)g(x)$ は偶関数である。

(2) $f(x), g(x)$ が奇関数のとき $f(x)g(x)$ は偶関数である。

(3) $f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が奇関数のとき $f(x)g(x)$ は奇関数である。

$h(x) = f(x)g(x)$ とおく。

(1)　$f(x), g(x)$ は偶関数であるから，任意の x に対し $f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$ が成立している。このとき任意の x に対し

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$$

となるので，$h(x)$ は偶関数である。

(2)　$f(x), g(x)$ は奇関数であるから，任意の x に対し $f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$ が成立している。このとき任意の x に対し

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = h(x)$$

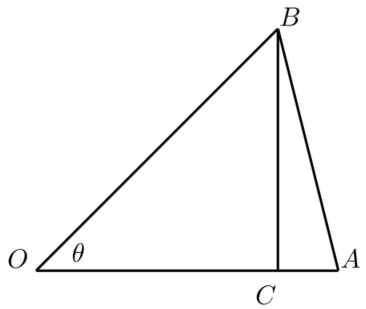
となるので，$h(x)$ は偶関数である。

(3)　$f(x)$ は偶関数，$g(x)$ は奇関数であるから，任意の x に対し $f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$ が成立している。このとき任意の x に対し

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

となるので，$h(x)$ は奇関数である。

演習問題 4.2　定理 4.1 を証明せよ。



$a = \overline{OA}$，$b = \overline{OB}$，$c = \overline{AB}$ とおく。点 B から直線 OA におろした垂線の足を C とする。また角 $\angle ABC = \varphi$ とおく。このとき $\overline{OC} = b\cos\theta$，$\overline{BC} = b\sin\theta$，$\overline{AC} = c\sin\varphi$，$\overline{BC} = c\cos\varphi$ が成立している。$a = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = b\cos\theta + c\sin\varphi$ より $a - b\cos\theta = c\sin\varphi$ と変形して両辺を 2 乗すると

$$a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta = c^2\sin^2\varphi \tag{1}$$

となる。$b\sin\theta = \overline{BC} = c\cos\varphi$ の両辺を 2 乗すると

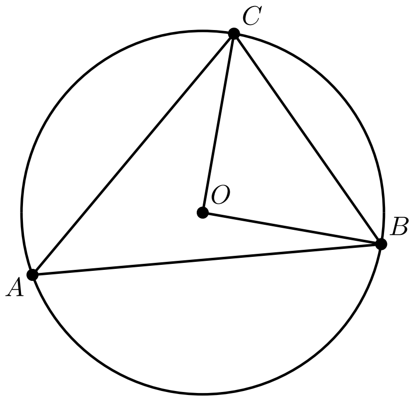
$$b^2\sin^2\theta = c^2\cos^2\varphi \tag{2}$$

が得られる。(1) 式と (2) 式を加えると

$$a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 = c^2$$

となり，定理 4.1 が証明される。

演習問題 4.3　定理 4.2 を証明せよ。



外接円の半径を r とする。円周角 A に対応する中心角は $\angle BOC$ であり，中心角は円周角の 2 倍なので $\angle BOC = 2\angle A$ が成立している。また $\triangle OBC$ は二等辺 3 角形なので $r\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{2} = \dfrac{a}{2}$ より

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

が成立する。他の角についても同様に成立するので

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

が成立する。

演習問題 4.4　上式 (1),(2) を証明せよ。

点 O, A, A', B, C, D, E を下図のようにおく。$x' = \overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$ である。

$$\overline{OE} = \overline{OB'}\cos\theta = \overline{OB}\cos\theta = x\cos\theta$$

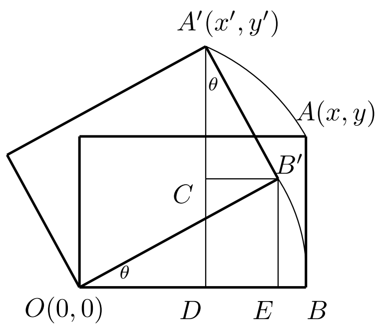
および

$$\overline{DE} = \overline{CB'} = \overline{A'B'}\sin\theta = \overline{AB}\sin\theta = y\sin\theta$$

より

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

が従う。



$y' = \overline{DA'} = \overline{A'C} + \overline{CD}$ である。

$$\overline{A'C} = \overline{A'B'}\cos\theta = \overline{AB}\cos\theta = y\cos\theta$$

および

$$\overline{CD} = \overline{B'E} = \overline{OB'}\sin\theta = x\sin\theta$$

より

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

が従う。

演習問題 4.5　加法定理を用いて以下の公式を示せ。

(1)

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

ここでは 2 通りの証明方法を紹介しておく。最初に高校でやったような三角関数の加法定理を用いる通常の方法，次にオイラーの公式を用いる方法を紹介する。

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ が成立している。

$$\begin{aligned}
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin x\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos x \\
&= \sin x\cdot 0 + 1\cdot\cos x = \cos x \\
\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sin x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos x \\
&= \sin x\cdot 0 + (-1)\cdot\cos x = -\cos x \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1 = -\sin x \\
\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x
\end{aligned}
$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ が成立している。

$$
\begin{aligned}
\exp\left(i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \exp(ix)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i\sin x)i = -\sin x + i\cos x \quad \text{および} \\
\exp\left(i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

の実部と虚部を比較することにより

$$
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x
$$

が得られる。同様に

$$
\begin{aligned}
\exp\left(i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \exp(ix)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i\sin x)(-i) = \sin x - i\cos x \quad \text{および} \\
\exp\left(i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

の実部と虚部を比較することにより

$$
\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x
$$

が得られる。

(2)

$$
\sin(x \pm \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x \pm \pi) = -\cos x
$$

$\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$ が成立している。

$$
\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= \sin x \cos\pi + \sin\pi \cos x \\
&= \sin x \cdot (-1) + 0 \cdot \cos x = -\sin x \\
\sin(x-\pi) &= \sin\left(x + (-\pi)\right) \\
&= \sin x \cos(-\pi) + \sin(-\pi)\cos x \\
&= \sin x \cdot (-1) + 0 \cdot \cos x = -\sin x \\
\cos(x+\pi) &= \cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi \\
&= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 = -\cos x \\
\cos(x-\pi) &= \cos\left(x + (-\pi)\right) \\
&= \cos x \cos(-\pi) - \sin x \sin(-\pi) \\
&= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 = -\cos x
\end{aligned}
$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。$\exp(i\pi) = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $\exp(-i\pi) = e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$ が成立している。

$$\begin{aligned} \exp(i(x+\pi)) &= \exp(ix)\exp(i\pi) = (\cos x + i\sin x)(-1) = -\cos x - i\sin x \quad \text{および} \\ \exp(i(x+\pi)) &= \cos(x+\pi) + i\sin(x+\pi) \end{aligned}$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$$

が得られる。同様に

$$\begin{aligned} \exp(i(x-\pi)) &= \exp(ix)\exp(-i\pi) = (\cos x + i\sin x)(-1) = -\cos x - i\sin x \quad \text{および} \\ \exp(i(x-\pi)) &= \cos(x-\pi) + i\sin(x-\pi) \end{aligned}$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos(x-\pi) = -\cos x, \qquad \sin(x-\pi) = -\sin x$$

が得られる。

(3)　$\tan x$ **の加法定理：**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \end{aligned}$$

次を示すために $\theta_1 + \theta_2$ を $\theta_1 - \theta_2$ に変えた場合の加法定理を示しておく。$\sin(-\theta_2) = -\sin\theta_2$ および $\cos(-\theta_2) = \cos\theta_2$ は既知とする。

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin\bigl(\theta_1 + (-\theta)_2\bigr) \\ &= \sin\theta_1\cos(-\theta_2) + \cos\theta_1\sin(-\theta_2) \\ &= \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos\bigl(\theta_1 + (-\theta)_2\bigr) \\ &= \cos\theta_1\cos(-\theta_2) - \sin\theta_1\sin(-\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{aligned}$$

これを用いる。

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。ただし tan の場合はそれほど有効でないかもしれないが，他でもこの方法を紹介しているので，一応紹介しておこう。最初に

$$\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)+\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)=2\left(e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}\right)$$
$$\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)+\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)=2\left(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}\right)$$

が成立することに注意しておく。

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$$

が成立しているので，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{i(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})}$$
$$=\frac{\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)+\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)}{i\left(\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)+\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\right)}$$
$$=\frac{\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)}+\dfrac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{i\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)}}{1-\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)}\dfrac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{i\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)}}$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\tan(\alpha-\beta)$ は $\tan(\alpha+\beta)$ の公式に

$$\tan(-x)=\frac{e^{i(-x)}-e^{-i(-x)}}{e^{i(-x)}+e^{-i(-x)}}=-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}=-\tan x$$

を適用しても得られるし，最初に 2 式の β を $-\beta$ に変えた式

$$\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)-\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)=2\left(e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}\right)$$
$$\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)-\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)=2\left(e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}\right)$$

を用いて直接計算しても得られる。

(4)　**倍角の公式：**

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right) = 2\cos^2\theta - 1 \\
&= 2\left(1-\sin^2\theta\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$
\begin{aligned}
&\exp(i2\theta) = \exp(i\theta)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{および} \\
&\exp(i2\theta) = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)
\end{aligned}
$$

の実部と虚部を比較することで得られる。

(5)　**3 倍角の公式：**

$$
\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
$$

(4) の式を用いる。

$$
\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + cos\theta\sin 2\theta \\
&= \sin\theta\bigl(1-2\sin^2\theta\bigr) + \cos\theta\bigl(2\sin\theta\cos\theta\bigr) \\
&= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\left(1-\sin^2\theta\right) \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \\
&= \cos\theta\bigl(2\cos^2\theta - 1\bigr) - \sin\theta\bigl(2\sin\theta\cos\theta\bigr) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\bigl(1-\cos^2\theta\bigr) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$
\begin{aligned}
\exp(i3\theta) &= \exp(i\theta)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\
&= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) \qquad \text{および} \\
\exp(i3\theta) &= \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)
\end{aligned}
$$

の実部と虚部を比較する。このとき $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると結果が得られる。

(6)　**半角の公式：**

$$
\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}
$$

(4) のコサインの倍角公式より従う。θ を $\dfrac{\theta}{2}$ で置き換えて

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\qquad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

という書き方もされる。

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}-2+e^{-(i2\theta)}}{-4}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\\ \cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}+2+e^{-(i2\theta)}}{4}\\ &=\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

(7) **和積公式：**

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $Y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと

$$X+Y=\alpha,\quad X-Y=\beta$$

が成立している。

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(X+Y)=\sin X\cos Y+\cos X\sin Y\\ \sin\beta &= \sin(X-Y)=\sin X\cos Y-\cos X\sin Y\end{aligned}$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= \sin X\cos Y+\cos X\sin Y+\sin X\cos Y-\cos X\sin Y\\ &=2\sin X\cos Y=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha-\sin\beta &= \sin X\cos Y+\cos X\sin Y-\big(\sin X\cos Y-\cos X\sin Y\big)\\ &=2\cos X\sin Y=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

が得られる。

$$\cos\alpha = \cos(X+Y) = \cos X\cos Y - \sin X\sin Y$$
$$\cos\beta = \cos(X-Y) = \cos X\cos Y + \sin X\sin Y$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= \cos X\cos Y - \sin X\sin Y + \cos X\cos Y - \sin X\sin Y \\ &= 2\cos X\cos Y = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha - \cos\beta &= \cos X\cos Y - \sin X\sin Y - \bigl(\cos X\cos Y - \sin X\sin Y\bigr) \\ &= -2\sin X\sin Y = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

オイラーの公式を用いた証明は，積和公式とまとめて次で行う。

(8)　**積和公式：**

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\Bigl\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\Bigr\} \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Bigl\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Bigr\} \\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\Bigl\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\Bigr\} \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Bigl\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Bigr\}\end{aligned}$$

$A = \alpha+\beta$，$B = \alpha-\beta$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

が成立している。すでに示した (7) の式において α，β をそれぞれ A，B に置き換える。(7) の最初の式を置き換えると

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

即ち

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Bigl\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Bigr\}$$

が得られる。2 番目の式を置き換えると

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

即ち

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Bigl\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\Bigr\}$$

が得られる。3 番目の式を置き換えると

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

即ち

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big\}$$

が得られる。4 番目の式を置き換えると

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

即ち

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\Big\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\Big\}$$

が得られる。

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\sin(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i}\,\frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{2i}\,\frac{e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy}}{2i} \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i2x} - e^{-i2y} - e^{i2y} + e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} - \frac{e^{i2y} + e^{-i2y}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 2y\right)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ とおくと和積公式の 4 番目の式が得られる。$\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 1 番目の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\cos(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i}\,\frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{2i}\,\frac{e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i2x} - e^{-i2y} + e^{i2y} - e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + \frac{e^{i2y} - e^{-i2y}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 2y\right)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ とおくと和積公式の 1 番目の式が得られる。$\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 2 番目の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y)\sin(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2}\frac{e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy}+e^{-ix}e^{-iy}}{2}\frac{e^{ix}e^{-iy}-e^{-ix}e^{iy}}{2i} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i2x}+e^{-i2y}-e^{i2y}-e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}-\frac{e^{i2y}-e^{-i2y}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\sin 2y\right)
\end{aligned}
$$

この式において $\alpha=2x$, $\beta=2y$ とおくと和積公式の 2 番目の式が得られる。$\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ とおくと積和公式の 3 番目の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y)\cos(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2}\frac{e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy}+e^{-ix}e^{-iy}}{2}\frac{e^{ix}e^{-iy}+e^{-ix}e^{iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2y}+e^{i2y}+e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+\frac{e^{i2y}+e^{-i2y}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y\right)
\end{aligned}
$$

この式において $\alpha=2x$, $\beta=2y$ とおくと和積公式の 3 番目の式が得られる。$\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ とおくと積和公式の 4 番目の式が得られる。