

演習問題 4.12

- (1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。
 (2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

命題 4.16 を用いる方法と、用いず定義から直接求める方法の 2 つを紹介しておく。最初は用いる方法。

- (1) $X = c^{b \log_c a}$ とき、 c を底とする対数をとると

$$\log_c X = \log_c c^{b \log_c a} = b \log_c a \log_c c = b \log_c a = \log_c a^b$$

が成立する。 \log は単射なので $\log_c X = \log_c a^b$ なら $X = a^b$ が、即ち $a^b = c^{b \log_c a}$ が成立する。

- (2) $X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ である。 $Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ である。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立するが、 \log は単射なので $X = Y$ が成立する。

命題 4.16 を用いず定義から求める。対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

- (1) $Y = \log_c a$ とおくと $a = c^Y$ が成立する。即ち $a = c^{\log_c a}$ が成立する。両辺を b 乗すると $a^b = c^{b \log_c a}$ が得られる。
 (2) $X = \log_c a$ とおくと $a = c^X$ が成立し、 $Y = \log_c b$ とおくと $b = c^Y$ が成立する。

$$a^{\log_c b} = (c^{\log_c a})^{\log_c b} = c^{\log_c a \log_c b}$$

$$b^{\log_c a} = (c^{\log_c b})^{\log_c a} = c^{\log_c b \log_c a}$$

よって $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ が成立する。

演習問題 4.13

- (1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (2) 次の式を証明せよ。

(1) $\arccos \frac{4}{5} = \arcsin \frac{3}{5}$

(2) $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$

(3) $\arccos \frac{24}{25} + \arccos \frac{12}{13} = \arcsin \frac{204}{325}$

$$(4) 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(3) 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \arctan 2 + \arctan 3$$

$$(2) \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}$$

(4) 方程式 $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5) $-1 \leq x \leq 1$ の時, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $x > 0$ の時, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(7) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

逆三角関数の問題を考えるときには値の範囲のチェックが必要である。 y の範囲が分からないときには, $x = \sin y$ から $y = \arcsin x$ は導かれない。

(1) $x = \arcsin \frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で $\sin x = \frac{1}{2}$ となる x を求めると $x = \frac{\pi}{6}$ である。よって $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ となる。

$x = \arccos \frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$, 即ち $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan 1$ とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$, 即ち $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$, 即ち $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arctan \sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$, 即ち $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{6}$, 即ち $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ となる。

(2)

(1) $\arccos \frac{4}{5} = \alpha$ とおくと

$$\arccos \frac{4}{5} = \alpha \iff \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

である。ここで $\cos \alpha \geq 0$ より $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ が成立する。

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

となるが $\sin \alpha \geq 0$ より $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ となる。ここからいきなり $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$ としないように !!

α の範囲のチェックを必ずすること。 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$ となる。よって

$$\arccos \frac{4}{5} = \alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

となる。

(2) $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$ とおくと

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。 $\beta = \arcsin \frac{5}{13}$ とおくと

$$\sin \beta = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。ここで $\frac{3}{5}, \frac{5}{13}$ は共に正であり, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より小さいので

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

が成立していることを注意しておく。このとき $\cos \alpha, \cos \beta$ ともに正なので

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

が成立する。ここからいきなり $\alpha + \beta = \arcsin \frac{56}{65}$ としないように!! $\alpha + \beta$ の範囲のチェックを必ずすること。最初の注意より $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha + \beta = \arcsin \frac{56}{65}$ 即ち

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$$

が成立する。

(3) $\alpha = \arccos \frac{24}{25}$, $\beta = \arccos \frac{12}{13}$ とおくと

$$\cos \alpha = \frac{24}{25} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi), \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

が成立している。 $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$ より $\alpha \leq \frac{\pi}{2}, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である。よって $\sin \alpha \geq 0, \sin \beta \geq 0$ が成立している。

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \sin \beta = \frac{5}{13}$ である。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{7}{25} \frac{12}{13} + \frac{24}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{204}{325} \end{aligned}$$

ここからいきなり $\alpha + \beta = \arcsin \frac{204}{325}$ としないように!! $\alpha + \beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ となるが

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{24}{25} \frac{12}{13} - \frac{7}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{253}{325} \geq 0 \end{aligned}$$

より $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\alpha + \beta = \arcsin \frac{204}{325}$$

である。

(4) $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$ とおくと $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) であるが, $0 < \tan \alpha < 1$ より $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ である。

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12} \quad (0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \quad (0 < 4\alpha < \pi)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}\right)$$

ここからいきなり $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$ としないように!! $4\alpha - \frac{\pi}{4}$ の範囲のチェックを必ずすること。

ここで $0 < \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ より $4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$$

となり式が得られる。

(3)

(1) $\arctan 2 = \alpha, \arctan 3 = \beta$ とおくと

$$\tan \alpha = 2 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan \beta = 3 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

である。 $\tan \alpha > 0, \tan \beta > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ である。また $\alpha + \beta < \pi$ である。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$

と $0 < \alpha + \beta < \pi$ より $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ となるので

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

(2) $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha, \arcsin \frac{12}{13} = \beta$ とおくと

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin \beta = \frac{12}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0$ より $0 < \alpha, 0 < \beta$ である。また $\alpha + \beta \leq \pi$ である。

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

と $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$ より $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \cos \beta = \frac{5}{13}$ である。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \frac{12}{13} = 1$$

となるが $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ より $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

(4) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

である。また $y = \arctan x$ より

$$\tan y = x$$

なので、

$$\sin y = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に代入すると $1 = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{5}$ より $x^2 = 4$ を得る。

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

より $x > 0$ なので $x = 2$ が解である。

(5) $u = \arcsin x$ とおくと $x = \sin u$ ($-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$) であり、 $v = \arccos x$ とおくと $x = \cos v$ ($0 \leq v \leq \pi$) である。演習問題 4.4 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -(-\cos v) = \cos v$$

の成立が示される。 $0 \leq v \leq \pi$ のとき $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - v \leq \frac{\pi}{2}$ であり、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$$

なので $\frac{\pi}{2} - v = u$ となり、 $u + v = \frac{\pi}{2}$ となる。

(6) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) である。 $x > 0$ より $0 < u < \frac{\pi}{2}$ となっている。 $v = \arctan \frac{1}{x}$ とおくと $\frac{1}{x} = \tan v$ ($-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$) である。 $\frac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \frac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 4.4 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。 u, v ともに $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$ なので $0 < \frac{\pi}{2} - v < \frac{\pi}{2}$ となり、 $\frac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(7) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$ であり, $v = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1+x^2 = 1+\tan^2 u = 1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。