数学序論に対する追加説明 $\sharp 1$

- 番号は指定された format で書くこと。
- 1 年生は次の様に書くこと。
  学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭部分に何個かの 0 があればそれを削除したもの。例えば学籍番号が **161080005x** であれば **5**，**161080038x** であれば **38**，**161080157x** であれば **157**，**161088088x** であれば **8088** です。
- 2 年生以上の学生の様に学籍番号が「16」で始まらない学生は 10 桁の学籍番号を書くこと。
- 文章を読んで，指定された format の通り書く能力を身につけることは非常に重要である。
- 用紙は指定された場所に置くこと。
- 指定された演習問題を解くこと。
- 真理値表について理解してないと思われる人が若干いる。この問題を演習時間に再度行なうことはしないが，各自しっかり理解しておくこと。
- 真理値表に関して再度説明しておく。

  真理値表は真偽のすべての場合を記述する欄とそれに対応して真偽が決まる欄からなる。真偽のすべての場合を記述する欄が縦にいくつの行が必要かということは論理式に含まれる命題の個数に依存する。

  (1) $\neg(\neg P) \equiv P$ の場合論理式に含まれる命題の個数は 1 個なので行は 2 行である。

  (3) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ の場合論理式に含まれる命題の個数は 2 個なので行は 4 行必要になる。

  (5) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ の場合論理式に含まれる命題の個数は 3 個なので行は 8 行必要になる。

  一般に命題の個数が k 個のとき行は 2^k 行必要になる。

P
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

この欄の右に真偽を記述するのに必要な欄を書いていく。

(1) の場合必要なのは $\neg(\neg P)$ であるが，この真偽を見るために $\neg P$ も必要なのでこの欄も書くと，真理値表は次の様になる。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

- **解答の書き方について**：解答は他人が読んで理解可能なように書く必要がある。書く途中および書上げたら,「他人の目」で推敲して，他人が読んで分かるかをチェックすること。特に高校でそのような訓練をしていない人は最初は意識的に推敲をすること。
- X と Y が同値とは「$X \Longrightarrow Y$ が真かつ $Y \Longrightarrow X$ が真」ということなので，それを証明すればよい訳である。
- ここでは**対偶** (*contraposition*) を例に解説する。$X : P \Longrightarrow Q$, $Y : \neg Q \Longrightarrow \neg P$ とする。Y を X の対偶という。これらが同値であることを示す。真理値表を書くと次のようになる。

P	Q	$P \Longrightarrow Q(X)$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Longrightarrow \neg P(Y)$	$X \Longrightarrow Y$	$X \Longleftarrow Y$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

- この真理値表であれば，示すべきこと ($X \Longrightarrow Y$ および $Y \Longrightarrow X$ が恒真命題であること) が真理値表の欄に書かれて

いるので，何か説明が書いてなくても，これを読む人は理解できるであろう。

- しかし次のようなやり方の場合真理値表だけでは不十分である。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

- 証明すべきことは $X \implies Y$ および $X \impliedby Y$ が真であることである。

  しかし，今の場合真理値表にはそのことは書かれていない。真理値表からどうして同値と分かるのか，理由を理解しているかが読む人 (私) に分かるように書かれていなければ証明とはいえない。

- この真理値表に加えて「X $(P \implies Q)$ と Y $(\neg Q \implies \neg P)$ の対応する欄の真偽が一致しているので同値である。」と書くのは 1 つの解答例であろう。

  解説を載せたのでそれを参考に (勿論解説と同じでなければならないということはない)。

- 「よって同値である」だけの説明もどうして「よって」なのか分からない。

- 「真理値表より同値であることが分かる」も前項とほとんど同じでダメ。理由を書くこと。

- 演習問題 1.5 について解説しておく。怒られるを A，勉強するを S とすると，命題は

$$\boxed{\neg A \implies \neg S}$$

  である。対偶命題を作ると

$$\boxed{\neg\neg S \implies \neg\neg A}$$

  即ち

$$S \implies A$$

となる。普通の日本語に直すと

彼は勉強すると怒られる

となる。どこかおかしいと思われるが，どこがおかしいのだろう。

- 日常の「P ならば Q」では P が「原因」で，Q が「結果」である。「P がおこることによって Q がおこる」のような意味で使われる。そして通常「原因」が時間的に先におき,「結果」は後でおこる。
- 数理論理の「$P \implies Q$」で P は「原因」とは限らず，Q は「結果」とは限らない。数理論理では P のことを「仮定」と呼び。Q のことを「結論」と呼ぶ。
- P と Q の間にある関係は P が真なら Q が真だということを主張しているだけであり，時間的にどちらが先にあるということは関係ない。
- 時間的に P が先で Q が後におきたとすると。対偶を作ると，仮定 $\neg Q$ が時間が後で，$\neg P$ が先になる。
- 演習問題に戻ると，時間的には A が先で，S が後だと考えられる。$S \implies A$ は時間の順序を考慮して日本語に直すと

  彼が勉強しているならば，(それより前に) 彼は怒られた。

  となる。こう考えれば対偶と元の命題が同値であることが分かる。