

数学序論に対する追加説明 #2

- 番号は format に基づいて正確に書くこと。
番号が正しく書かれていないものは未提出とみなす。
- 用紙を置く場所を間違えないこと。
置く場所を間違えた解答は未提出とみなす。
- 演習問題で「真偽を判定せよ」とあるとき、これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく、「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが必ず必要である。これからの演習問題も常にそういう意味だと理解すること。
結論だけ書いてある答えは、仮に結論があってもテストのように採点をすれば 0 点である。
- 「 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$ 」を例にとる。
- 「偽である。」とだけ書いてある答えは、結論はあっても、0 点である。
- 「 $x^4 - x^2 + \frac{1}{5}$ は必ず 0 以上になるので真である」というのは理由にはならない。（「真」という部分は間違っているが、今はそのことは問題にしない。）
 P という命題を証明するのに「 P が正しいので P が示された。」と書いてあるのと同じである。
- 「 x にどのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」というのもダメである。「どのような数をいれても」と書いてあるが、実数は無限集合なので、このことを実際に行うことは不可能である。
実行不可能なことを根拠にすることはできない。
- 「 $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ は偽。 $x = 1$ が反例」という解答があった。これは「存在」と「任意」に関連するので説明をする。
これが「 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ は偽。 $x = 1$ が反例」というのであれば正しい議論である。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

であり, $x = 1$ は

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

なので否定命題が成立し, もとの命題は偽であることが分かる。しかし

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

である。

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} > 0$$

は成立するが, 否定命題が成立するとはいえない。この意味で $x = 1$ は反例にはなっていない。

- 任意 (\forall) と存在 (\exists) の非対称性に注意すること。