数学序論に対する追加説明 $\sharp 5$

- 何度か言っているが**結果**だけ記すのではなく，理由を書くこと。
- 演習問題 2.2 (2) を解説する。

  問題は「3 で割ると余りが 2 となるような自然数全体の集合」を求めよというものであった。

  (1)–(3) は結果のみ書いてある解答でも間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解説しておく。

  結論は $A = \{\, 3k-1 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ である。
- この問題に関連する集合の基本事項は

  $$A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

  および

  $$A \subseteq B \iff \text{「}\forall a \ \ a \in A \implies a \in B\text{」}$$

  である。
- 自然数 (整数) n を p で割った余りが r という事は

  $$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leq r < p)$$

  と表される。

  よって 3 で割った余りが 2 である自然数の集合は

  $$B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 3k+2 \,\}$$

  となる。
- $A = \{\, 3k-1 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ とおくとき $A = B$ を示せばよい。

  $$A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

  なので $A \subseteq B$ および $A \supseteq B$ を示す。
- 最初に $A \subseteq B$ を示す。そのためには

  $$\forall a \quad a \in A \implies a \in B$$

  を示せばよい。

- a を A の任意の元とすると，ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k - 1$ と書ける。$k \geq 1$ より $3k - 1 \geq 2 > 0$ となるので，a は自然数である。

  また
  $$a = 3k - 1 = 3(k - 1) + 2$$
  であり，$k - 1 \in \mathbb{Z}$ である。

  よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は自然数であり，ある整数 k が存在して，$a = 3k + 2$ となる。

  ここで $k < 0$ とすると $k \leq -1$ なので
  $$a = 3k + 2 \leq -3 + 2 = -1 < 0$$
  となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geq 0$ である。

  よって $j = k + 1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり，
  $$a = 3k + 2 = 3(j - 1) + 2 = 3j - 1$$
  となる。

  よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

- 次に (4) を考える。

  3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 である集合を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

  結論は $A = \{15k - 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

  この段階では予想なのできちんとした証明が必要である。

- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z}\ x = 3k_1 + 2, \exists k_2 \in \mathbb{Z}\ x = 5k_2 + 3\}$ とするとき $A = B$ を示す。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。

  a を A の任意の元とする。$a = 15k - 7\,(k \in \mathbb{N})$ と書かれているので，$a = 3(5k - 3) + 2$ と書き直すことができる。ここで $5k - 3 \in \mathbb{Z}$ である。また $a = 5(3k - 2) + 3$ と書ける。ここで $3k - 2 \in \mathbb{Z}$ である。また $k \geq 1$ より $a = 15k - 7 \geq 15 - 7 = 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので，ある整数 k_1 が存在して $a = 3k_1 + 2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2 + 3$ と書ける。

- k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 j が存在して $k_2 = 3j + r$ と書ける。$r = 0$ または 1，2 である。

$$
\begin{aligned}
a &= 5k_2 + 3 = 5(3j + r) + 3 = 3 \cdot 5j + 3r + 2r + 3 \\
&= 3(5j + r + 1) + 2r
\end{aligned}
$$

  $r = 0$ のとき a が 3 で割り切れるので矛盾。$r = 2$ のとき a を 3 で割ったあまりは 1 なので矛盾。よって $r = 1$ である。

  このとき

$$
a = 5k_2 + 3 = 5(3j + 1) + 3 = 15j + 8 = 15(j + 1) - 7
$$

  となる。$k = j + 1$ とおく。$j < 0$ のとき $j \leq -1$ なので

$$
a = 15j + 8 < -15 + 8 = -7 < 0
$$

  となり a が自然数であることに矛盾，よって $j \geq 0$ である。このとき $k \in \mathbb{N}$ となる。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。

- 演習問題 2.4 (2) について解説する。問題は

  「$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ でないことを**定義に基づいて**証明せよ」

  である。

- この問題も集合の「流儀」を確認する問題である。

- 先に述べたように

$$
A \subseteq B \iff 「\forall a \quad a \in A \implies a \in B」
$$

  なので

$$
A \not\subseteq B \iff 「\exists a \quad a \in A \wedge a \notin B」
$$

  である。すなわち A の元で B の元でないものを見つければよい。

- $-1 \in \mathbb{Z}$ であり $-1 \notin \mathbb{N}$ なので $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ である。