数学序論に対する追加説明 $\sharp 6$

- ベン図は考えるとき役に立つが，ベン図のみで証明にはならない。

  ここでは「ベン図」を知っていることを前提に書いているが，「ベン図」をきちんとは定義していない。

  定義していないものを用いて証明することはできない。

- 23 通りのベン図を書いてもやっぱり証明にはならない。

- 掛け算の分配法則と形が似ていると言ったが，集合は数ではないので，それを証明に使うことはできない。次は間違い。

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= A \times (B + C) = A \times B + A \times C \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

- 集合と命題，$\cap, \cup$ と $\wedge, \vee$ を混同している人がいる。

  集合に真偽はないので，集合は勿論命題ではない。$\wedge, \vee$ は 2 つの命題を結びつける記号なので A, B が集合のとき

$$A \wedge B$$

  などという記法は間違いである。

  $\cap, \cup$ は集合を結びつける記号であり，$\wedge, \vee$ は命題を結びつける記号である。

  A, B が集合のとき

$$A \cap B, \qquad A \cup B$$

  という書き方はあるが，

$$A \wedge B, \qquad A \vee B$$

  は間違った書き方である。

  P, Q が命題のとき

$$P \wedge Q, \qquad P \vee Q$$

  という書き方はあるが，

$$P \cap Q, \qquad P \cup Q$$

  は間違った書き方である。

- ただし集合と命題の間に関係はある。x と集合 A に対し

$$x \in A$$

は「x は集合 A の元である」という命題 (関数) である。$\cap, \cup$ と $\wedge, \vee$ の間には

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

という対応関係がある。

- 演習問題 2.6 (1) を解説する。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を証明せよ，という問題である。

- すでに述べているように集合の基本事項は

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B}$$

および

$$\boxed{A \subseteq B \iff 「\forall a \ \ a \in A \implies a \in B」}$$

である。

- この問題では，共通部分と和集合の定義を知っていることが必要である。

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

および

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

である。

- これらに加え 1.1 節で学んだ論理の分配法則を使用する。論理の分配法則とは P, Q, R を命題とするとき

$$\boxed{P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

である。

- x を集合の元とする。

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

  よって示された。

- 内容的には同じことだが，集合のイコールで変形していく書き方もある。

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \cap B \vee x \in A \cap C\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

- 次に演習問題 2,8 (2) を解説する。X を全体集合とするとき

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

  の成立を示す。

- 証明には論理の de Morgan の法則が必要である。論理の de Morgan の法則とは P, Q を命題とするとき

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

  が成立するというものであった。

- x を X の元とする。

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff \neg(x \in A \cup B) \\ &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ &\iff x \notin A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$