数学序論に対する追加説明 $\sharp 7$

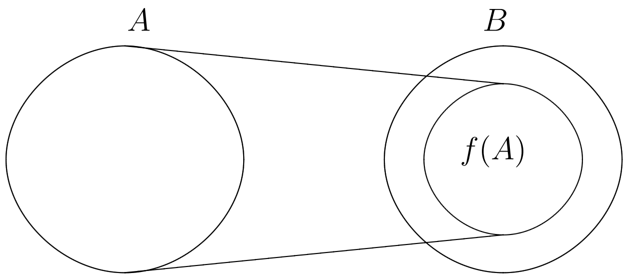
- 全射，単射について解説する。A から B への写像を

$$f : A \longrightarrow B$$

とする。定義域は A，終域は B である。値域は

$$\{\, f(a) \mid a \in A \,\} = \{\, b \in B \mid \exists a \in A \; b = f(a) \,\}$$

である。これを $f(A)$ と書く。模式図で見ると次図の様になっている。



- f が全射であることの定義は

$$f(A) = B$$

が成立することである。全射であることを示すためには次を示せばよい。

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \; b = f(a)$$

- たとえば $A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$，$B = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ とし写像

$$f : A \longrightarrow B$$

を

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$$

と定義する。このとき

$$f(A) = \{\, f(1), f(2), f(3), f(4) \,\}$$

$$= \{ 3, 1, 1, 1 \} = \{ 1, 3 \}$$

となる。$f(A) = \{ 1, 3 \} \neq \{ 1, 2, 3 \} = B$ なので f は全射ではない。

- 例 2.9 (1)[演習問題 2.12 (1)] を考える。

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^2 \end{aligned}$$

この f に対して $f(\mathbb{R})$ を求めて $\mathbb{R}$ と等しいかどうかを調べればよい。

- 結論は

$$f(\mathbb{R}) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = [\, 0, \infty\,)$$

である。これが示されれば $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ となり f が全射でないことが分かる。

- 2 つの集合 A, B に対し

$$A = B \iff 「A \subseteq B \land A \supseteq B」$$

が成立する。

- $f(\mathbb{R}) \subseteq [\, 0, \infty\,)$ を示す。y を $f(\mathbb{R})$ の任意の元とする。$f(\mathbb{R})$ の定義よりある $x \in \mathbb{R}$ が存在して $y = f(x)$ となる。$y = f(x) = x^2 \geq 0$ より $y \in [\, 0, \infty\,)$ となる。

- 関数 $y = g(x) = \sqrt{x}$ の存在を既知として $[\, 0, \infty\,) \subseteq f(\mathbb{R})$ を示す。

y を $[\, 0, \infty\,)$ の任意の元とする。y は関数 $g(x)$ の定義域に含まれているので，$x = g(y) = \sqrt{y}$ とおく。このとき

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

となるので $y \in f(\mathbb{R})$ となる。

- 写像

$$f : A \longrightarrow B$$

が次を満たすとき単射という。

$$\boxed{\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)}$$

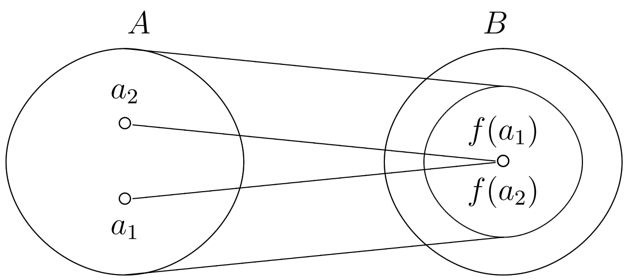
この条件は対偶をとると

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

となる。「単射でない」上の否定なので

$$\exists a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \land f(a_1) = f(a_2)$$

となる。次は単射でない場合の模式図である。



- 前に考えた写像 f が単射かどうか考える。$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とし写像

$$f : A \longrightarrow B$$

を

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$$

と定義した。

$$2 \neq 3 \land f(2) = 1 = f(3)$$

となるので f は単射ではない。

- 例 2.9 (1) を考える。写像 f は

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^2 \end{aligned}$$

である。

このとき

$$3 \neq -3 \quad \text{かつ} \quad f(3) = f(-3)$$

が成立するので単射ではない。

- 例 2.9 (3) を考える。写像 f は

$$f : [\,0,\ \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

である。前項の写像と異なり定義域に負の数はない。この写像は単射である。それを示すためには

$$\forall x, x' \in [\,0,\ \infty\,) \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

を示せばよい。

x, x' を $[\,0,\ \infty\,)$ の任意の元とする。$f(x) = f(x')$ を仮定すると $x^2 = x'^2$ である。

$$x^2 - x'^2 = (x - x')(x + x') = 0$$

となり，$x - x' = 0$ または $x + x' = 0$ が成立する。$x + x' = 0$ のとき $x \geq 0, x' \geq 0$ より $x = x' = 0$ となる。よって $x - x' = 0$ の場合も含めて $x = x'$ が成立する。