数学序論に対する追加説明 $\sharp 10$

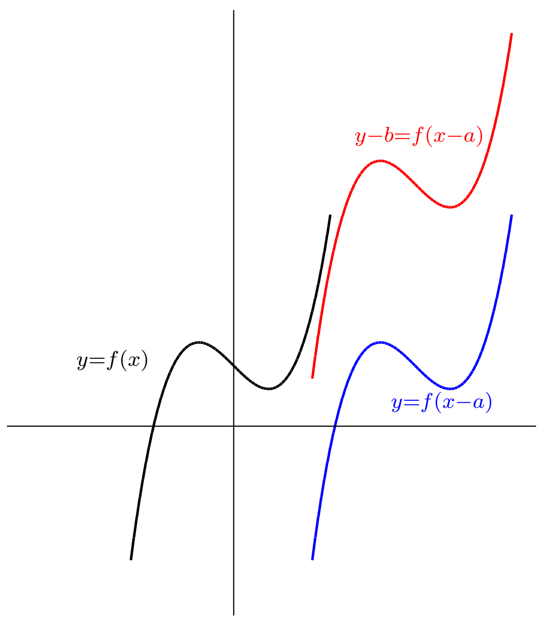
- 三角関数に関する公式は多いので，混乱することもあるが，グラフを用いて思い出すこともできる。演習問題 4.5 (1) を例に考える。(1) は次の式である。

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,\qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

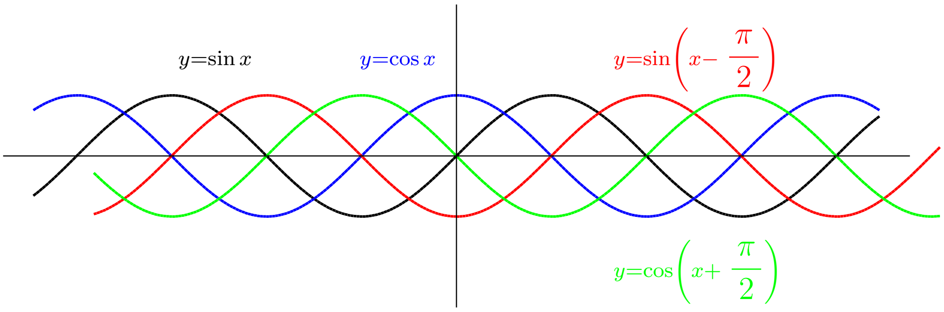
- 例えば $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ を $\sin x, \cos x$ 等を用いて表したいが，(1) の式を忘れたとしよう。

  このとき，グラフで考えることで (1) 式を導くことができる。

- グラフの平行移動についての基本事項を復習する。



$y=f(x)$ のグラフを x 方向に a 平行移動したグラフ (青色のグラフ) を表す式は $y=f(x-a)$ である。$y=f(x)$ のグラフを x 方向に a，y 方向に b 平行移動したグラフ (赤色のグラフ) を表す式は $y-b=f(x-a)$ である。



$y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $y = \sin x$ を x 方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \cos x$ を y 軸に関して折り返したものなので，$y = -\cos x$ である。

$y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $y = \sin\left(x - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ と見ると，$y = \sin x$ を x 方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \cos x$ となっている。

$y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $y = \cos x$ を x 方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \sin x$ である。

$y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $y = \cos x$ を x 方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフを表すので，$y = \sin x$ を y 軸に関して折り返したものなので，$y = -\sin x$ である。

- 「証明せよ」と言われた場合，絵で証明に替えられるかは問題であるが,「思い出す」ときには有効な方法である。

- 演習問題 4.9，4.10 について $a^{m+n} = a^m a^n$ のみを解説する。
- 問題には「数学的帰納法で」とある。これが書いてなければ次の証明でも間違いではない。

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\ 個} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ 個} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n\ 個} = a^{m+n} \end{aligned}$$

- しかし今の場合「数学的帰納法で」と書いてあるのでこれでは問題の要求する解答にはなっていない。問題をよく読むこと。

- 数学的帰納法で証明するには証明すべき命題 $P(n)$ を明確にしておく必要がある。n に関して数学的帰納法で証明するなら $P(n)$ は

$$P(n): \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad a^{m+n} = a^m a^n$$

とおく。

- m に関する帰納法で証明することもできる。そのときは

$$P(m): \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a^{m+n} = a^m a^n$$

とおく。

- 講義では扱っていないが二重帰納法で証明することもできる。それは

$$P(m, n): \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

とおき。

(1) $P(1, 1)$ の成立を示す。

(2) 任意の自然数 k に対し $P(k, 1) \implies P(k+1, 1)$ を示す。

(3) 任意の自然数 k, ℓ に対し $P(k, \ell) \implies P(k, \ell+1)$ を示す。

そのことにより

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

の成立を示す論法である。

- ここでは

$$P(n): \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a^{m+n} = a^m a^n$$

とおいて証明をする。

- 数学的帰納法では，使ってよい事と使ってはいけない事を区別することが大切である。

使っていけない一番のものは「証明すべき命題」である。当たり前の様に思えるが，うっかりすると使ってしまう場合がある。

$P(k)$ は帰納法の仮定であり使ってよいが，$P(k+1)$ はこれから示すべき命題なので使用してはいけない。

- 使ってよいのは
  - 定義
  - すでに証明された命題
  - 帰納法の仮定

  である。

- 演習問題 4.9 を解くために必要な定義はべき乗の定義である。

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{k+1} &= a^k \cdot a && (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

- 最初に $P(1)$ の成立を示す。

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= a^m \cdot a && (\text{定義}) \\ &= a^m a^1 && (\text{定義}) \end{aligned}$$

- 次に $P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す。$P(k)$ 即ち $a^{m+k} = a^m a^k$ は帰納法の仮定だから使用してよい (というか，帰納法の仮定を使用しないで，帰納法で示すことはできない) 。

$$\begin{aligned} a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && (\text{和の結合法則}) \\ &= a^{m+k} \cdot a && (\text{定義}) \\ &= \left(a^m a^k\right) \cdot a && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= a^m \left(a^k \cdot a\right) && (\text{積の結合法則}) \\ &= a^m a^{k+1} && (\text{定義}) \end{aligned}$$

- 次に演習問題 4.10 を考える。証明すべきことは

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

  である。

- 整数のべき乗の定義は

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^{-1} &= \frac{1}{a} \\
a^n &= \left(a^{-1}\right)^p & (n = -p, p \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

  である。

- 最初に

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

  を示す。

  $n \in \mathbb{N}$ のときは定義そのものである。$n = 0$ のときは

$$\begin{aligned}
a^{0+1} = a^1 = a &= 1 \cdot a & \text{(定義)} \\
&= a^0 \cdot a & \text{(定義)}
\end{aligned}$$

  となり成立している。$n = -1$ のときは

$$\begin{aligned}
a^{-1+1} &= a^0 = 1 & \text{(定義)} \\
&= a^{-1} \cdot a & \text{(定義)}
\end{aligned}$$

  より成立する。$n < -1$ のとき $n = -p$ とおくと，p および $p - 1$ は自然数である。

$$\begin{aligned}
a^{n+1} &= a^{-p+1} = a^{-(p-1)} = \left(a^{-1}\right)^{p-1} & \text{(定義)} \\
&= \left(a^{-1}\right)^{p-1} \cdot 1 = \left(a^{-1}\right)^{p-1} \cdot \left(a^{-1} \cdot a\right) & \text{(定義)} \\
&= \left(\left(a^{-1}\right)^{p-1} \cdot a^{-1}\right) \cdot a & \text{(結合法則)} \\
&= \left(a^{-1}\right)^{(p-1)+1} \cdot a = \left(a^{-1}\right)^p \cdot a & \text{(定義)} \\
&= a^{-p} \cdot a = a^n \cdot a & \text{(定義)}
\end{aligned}$$

  よって証明された。

- 証明された式は任意の整数で成立するので，n を $n - 1$ に置き換えれば，任意の整数 n に対し

$$a^{n-1+1} = a^{n-1} \cdot a$$

が成立している。これを移項して

$$a^n \cdot \left(a^{-1}\right) = a^{n-1}$$

を得る。

- 数学的帰納法で証明する。そのために

$$Q(n) \quad : \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

とする。

- 最初に $n \geq 0$ のとき帰納法で証明する。

$n = 0$ のとき

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0 \qquad \text{(定義)}$$

より $Q(0)$ は成立する。

$Q(k)$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned} a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && \text{(結合法則)} \\ &= a^{m+k} \cdot a && \text{(証明済)} \\ &= \left(a^m \cdot a^k\right) \cdot a && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= a^m \cdot \left(a^k \cdot a\right) && \text{(結合法則)} \\ &= a^m a^{k+1} && \text{(定義)} \end{aligned}$$

$Q(k+1)$ が成立するので 0 以上の整数 n に対し $Q(n)$ が成立する。

- n が負のときは $n = -p$ とおく。

$$R(p) \quad ： \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad a^{m+(-p)} = a^m \cdot a^{-p}$$

とし，p に関する帰納法で証明する。

- $p=0$ のときは成立している。$p=k$ のとき成立を仮定する。

$$
\begin{aligned}
a^{m+(-(k+1))} = a^{(m-k)-1} = a^{m-k} \cdot a^{-1} & \qquad \text{(証明済)} \\
= \left(a^m \cdot a^{-k}\right) \cdot a^{-1} & \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
= a^m \cdot \left(a^{-k} \cdot a^{-1}\right) & \qquad \text{(結合法則)} \\
= a^m \cdot \left(\left(a^{-1}\right)^k \cdot a^{-1}\right) & \qquad \text{(定義)} \\
= a^m \cdot \left(a^{-1}\right)^{k+1} & \qquad \text{(定義)} \\
= a^m \cdot a^{-(k+1)} & \qquad \text{(定義)}
\end{aligned}
$$

$R(k+1)$ が成立するので，0 以上の自然数 p に対し $R(p)$ が成立する。