

## 数学序論に対する追加説明 #11

- 逆三角関数の性質で扱った例について、もう一度解説しておく。
- 例は  $\arcsin \frac{1}{10} = x, \arccos \frac{1}{10} = y$  のとき  $x, y$  の関係式を求める、というものであった。
- 前回は解析の過程については述べなかつたので分かりにくかつたかもしれない。今回は解析の過程も説明する。
- 最初に逆三角関数の「辞書」を確認しておく。

$$\begin{aligned}y = \arcsin x &\iff x = \sin y && \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right) \\y = \arccos x &\iff x = \cos y && (0 \leq y \leq \pi) \\y = \arctan x &\iff x = \tan y && \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

- 解析を始めよう。「辞書」を使って三角関数の関係に直すと次のようになる。

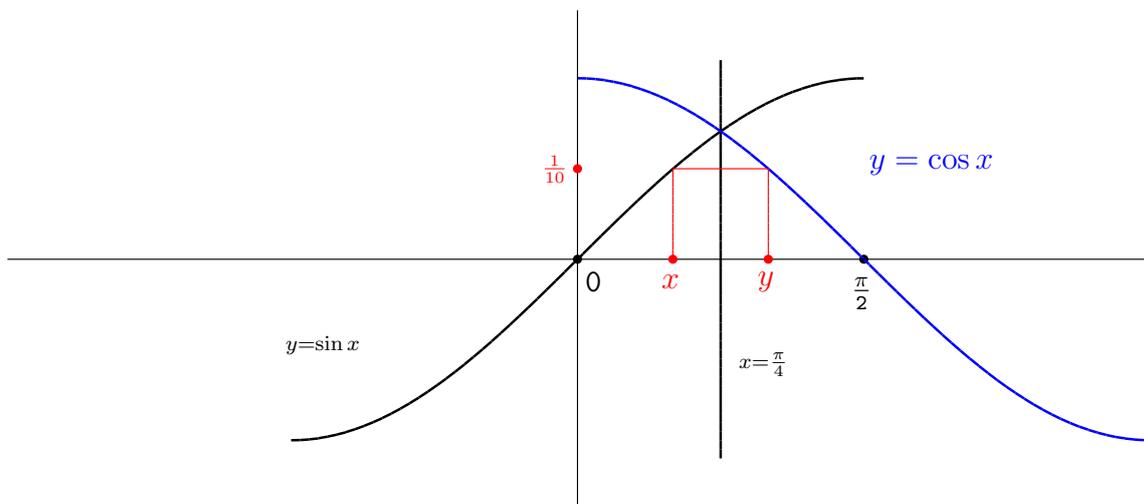
$$\begin{aligned}x = \arcsin \frac{1}{10} &\iff \frac{1}{10} = \sin x && \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\y = \arccos \frac{1}{10} &\iff \frac{1}{10} = \cos y && (0 \leq y \leq \pi)\end{aligned}$$

- すなわち  $-\frac{\pi}{2}$  と  $\frac{\pi}{2}$  の間にある  $x$  と  $0$  と  $\pi$  の間にある  $y$  について

$$\sin x = \frac{1}{10} = \cos y$$

となっている。

- グラフを描くと次の様になっている。



- グラフを見ると  $x$  と  $y$  は直線  $x = \frac{\pi}{4}$  に関して対称になっている様に見える。すなわち

$$\frac{x + y}{2} = \frac{\pi}{4}$$

が成立している様に見える。よってこれを証明することを試みる。

- 逆三角関数の問題では,  $X = Y$  を証明しようとするとき,  $\sin X, \cos Y$  などが与えられ,  $X, Y$  自身の関係式は与えられないことが多い。
- 三角関数の関係式から等号は無条件で出てこない。範囲のチェックが必要になる。
- 逆三角関数に関連して整理しておく,  $X = Y$  が成立するためには次の (1), (2) が成立するればよい。
  - (1)  $\sin X = \sin Y$
  - (2)  $-\frac{\pi}{2} \leq X, Y \leq \frac{\pi}{2}$
- サインと同様にコサインの関係式でもよい。
  - (1)  $\cos X = \cos Y$
  - (2)  $0 \leq X, Y \leq \pi$
- タンジェントの関係式でもよい。

$$(1) \tan X = \tan Y$$

$$(2) -\frac{\pi}{2} < X, Y < \frac{\pi}{2}$$

- $X = x, Y = \frac{\pi}{2} - y$  においてサインの式を適用する。

$$\sin Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y = \frac{1}{10}$$

よって (1) の

$$\sin X = \sin x = \frac{1}{10} = \sin Y$$

は成立している。

- (2) だが,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  は最初から成立している。 $y$  を与えられた条件から変形すると

$$0 \leq y \leq \pi \iff -\pi \leq -y \leq 0$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - \pi \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$$

となり (2) も成立する。以上により  $x = \frac{\pi}{2} - y$  が示された。