数学序論に対する追加説明 $\sharp$12

- 逆三角関数に関して再度解説する。
- 逆三角関数の問題では式の計算と同じ比重で範囲の限定が重要であった。
- ここではサイン，コサインの値から範囲を制限することについて解説しておく。
- 最初に演習問題 4.14 (2) 2) を取り上げる。

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$$

  を証明せよという問題である。

- $x=\arcsin\frac{3}{5}, y=\arcsin\frac{5}{13}, z=\arcsin\frac{56}{65}$ とおく。
- 「辞書」を用いて「翻訳」すると

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}&=\sin x & -\frac{\pi}{2}&\le x\le\frac{\pi}{2}\\
\frac{5}{13}&=\sin y & -\frac{\pi}{2}&\le y\le\frac{\pi}{2}\\
\frac{56}{65}&=\sin z & -\frac{\pi}{2}&\le z\le\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

  となる。

- 与えられている式がサインであり，証明すべき式が

$$x+y=z$$

  なので

$$\sin(x+y)=\sin z \qquad -\frac{\pi}{2}\le x+y\le\frac{\pi}{2}$$

  を示せばよいという方針が立つ。

- $\sin(x+y)$ を計算するためには $\cos x, \cos y$ の値を求める必要がある。

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

を用いて $\sin x$ から $\cos x$ を求めることができる。

一般には

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

であるが，$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ という条件より $\cos x \geq 0$ となるので $\cos x = \frac{4}{5}$ である。

同様に一般には

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm\frac{12}{13}$$

であるが，$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ という条件より $\cos y \geq 0$ となるので $\cos x = \frac{12}{13}$ である。

- よって

$$\begin{aligned}\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y = \frac{3}{5}\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\frac{5}{13} \\ = \frac{56}{65} = \sin z\end{aligned}$$

  となる。

- 次は $x+y$ の範囲を調べる必要がある。与えられた条件は $-\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$ なので，単純に加えると

$$-\pi \leq x+y \leq \pi$$

  になる。しかし，これでは十分な結果ではない。

- $-\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}$ の成立を示すことが必要である。方法は色々考えられるが，ここでは $\cos(x+y)$ を計算することにより示す。

- $-\pi \leq X \leq \pi$ のとき

$$\cos X \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y \\ &= \frac{4}{5}\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\frac{5}{13} = \frac{33}{65} > 0\end{aligned}$$

より $-\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}$ が成立する。

- 以上により

$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$$

が証明された。

- 次に演習問題 4.14 (2) 4) を取り上げる。式は

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

であるが，π の近似計算に用いられる有名な式 [(1)] である。

- $x = \arctan\frac{1}{5}, y = \arctan\frac{1}{239}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} &= \tan x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{239} &= \tan y & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

が成立する。

$$\tan(4x-y) = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < 4x-y < \frac{\pi}{2}$$

の成立を示せば証明される。

- 前者の等式を求めるために tan の加法定理を繰り返し適用する。

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

[(1)]1706 年にイギリスの天文学者マチンによって発見された (マチンの公式)。

$$\tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \frac{2\cdot\dfrac{5}{12}}{1-\left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$\begin{aligned}\tan(4x-y) &= \frac{\tan 4x - \tan y}{1+\tan 4x \tan y} = \frac{\dfrac{120}{119}-\dfrac{1}{239}}{1+\dfrac{120}{119}\dfrac{1}{239}} \\ &= \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = \frac{(119+1)\cdot 239 - 119}{119\cdot 239+120} \\ &= \frac{119\cdot 239+120}{119\cdot 239+120} = 1\end{aligned}$$

- 次は範囲の限定である。

  $\tan x = \dfrac{1}{5} > 0$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より

  $$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

  となっている。よって $0 < 2x < \pi$ である。この条件と $\tan 2x = \dfrac{5}{12} > 0$ より

  $$0 < 2x < \frac{\pi}{2}$$

  が成立する。よって $0 < 4x < \pi$ である。この条件と $\tan 4x = \dfrac{120}{119} > 0$ より

  $$0 < 4x < \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

  が成立している。

  $\tan y = \dfrac{1}{239} > 0$ と $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ より

  $$0 < y < \frac{\pi}{2}$$

  が成立している。これより

  $$-\frac{\pi}{2} < -y < 0 \tag{2}$$

  が成立している。式 (1) と式 (2) を加えると

  $$-\frac{\pi}{2} < 4x - y < \frac{\pi}{2}$$

  が得られる。