数学序論に対する追加説明 ♯13

- 演習問題 5.5 (3) について解説する。

$$\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$$

の極限を求める問題であるがどう「無理化」するかが問題である。

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

を用いてもうまくいかない。3 乗根を消すためには 3 乗をつくる必要がある。

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

を用いる。

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) &= \frac{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{n^2}\,(n+1-n)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}+1}
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\frac{1}{3}$$

- 演習問題 5.4 について解説する。
(1) の結果は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ である。
この結果から「2^n の増大度が n より大きい」ことが分かるので,「2^n の増大度が n より大きいので 0 になる」という証明は正しくない。

- 極限値が 0 であることを示すには次のような $f(n)$ を見つければよい。

$$0<\frac{n}{2^n}<\frac{n}{f(n)},\qquad \frac{n}{f(n)}\to 0\quad(n\to\infty)\tag{1}$$

- $f(n)$ が次を満たすとき (1) が満たされる。

$$f(n) < 2^n, \qquad f(n) \text{ は 2 次以上の多項式}$$

- 2 項定理を用いて $f(n)$ を見つける。

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

なので ${}_nC_k$ は n の k 次式になっていることに注意する。

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \geq \sum_{k=0}^{2} {}_nC_k \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 \geq {}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

より

$$f(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

とおくと

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)}$$

となるが,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\dfrac{1}{n}}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

となり示される。

- 必要な次数の多項式を見つければ演習問題 5.4 の他の問題も同様にできる。

- (3) は多項式 $f(n)$ で

$$f(n) < 2^n, \quad f(n) \text{ は 4 次以上の多項式}$$

となるものを見つければよい。これが見つかれば

$$0 < \frac{n^3}{2^n} < \frac{n^3}{f(n)}, \qquad \frac{n^3}{f(n)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となりはさみうちの定理より結論が得られる。

- 前と同様に

$$
\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \geq \sum_{k=0}^{4} {}_nC_k \geq {}_nC_4 \\
= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}
\end{aligned}
$$

より

$$
0 < \frac{n^3}{2^n} < \frac{24n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{24n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{24\dfrac{1}{n}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0
$$

となる。