数学序論追加説明 $\sharp$14

- 演習問題 5.21 について解説する。
- 定義に基づいて $y = 2^{x^2}$ の導関数を求める。

  $y = 2^{x^2}$ は $u = x^2$ と $y = 2^u$ の合成関数と考えることができる。指数関数の極限に関して使える事実は

  $$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{1}$$

  である。この問題もこれに帰着させる必要がある。

- $2 = e^k$ とおくと $k = \log 2$ なので

  $$y = 2^{x^2} = \left(e^k\right)^{x^2} = e^{kx^2}$$

  となる。

  $$\Delta = \frac{e^{k(x+h)^2} - e^{kx^2}}{h}$$

  とおくと

  $$\begin{aligned}
  \Delta &= \frac{e^{k(x+h)^2} - e^{kx^2}}{h} = \frac{e^{k(x^2+2xh+h^2)} - e^{kx^2}}{h} \\
  &= \frac{e^{kx^2} e^{k(2xh+h^2)} - e^{kx^2}}{h} = e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{h} \\
  &= e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{k(2xh+h^2)} \frac{k(2xh+h^2)}{h} \\
  &= e^{kx^2} \frac{e^{k(2xh+h^2)} - 1}{k(2xh+h^2)} k\,(2x+h)
  \end{aligned}$$

  $H = k(2xh + h^2)$ とおくと

  $$= e^{kx^2} \frac{e^H - 1}{H} k(2x+h)$$

  $h \to 0$ のとき $H \to 0$ なので

  $$\begin{aligned}
  \left(2^{x^2}\right)' &= e^{kx^2} \lim_{H \to 0} \frac{e^H - 1}{H} \lim_{h \to 0} k(2x+h) = e^{kx^2} 2kx \\
  &= 2x 2^{x^2} \log 2
  \end{aligned}$$

- 次に $y = \log x$ を考える。対数関数に関しても使える極限は (1) である。これに帰着させることが必要である。

$$\Delta = \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

とおく。この式を (1) が適用できる形に変形する必要がある。

$y = \log x$ より $x = e^y$ となる。$k = \log(x+h) - \log x$ とおくと

$$\log(x+h) = y + k$$

より

$$e^{y+k} = x + h$$

となる。よって

$$\Delta = \frac{k}{e^{y+k} - e^y}$$

となる。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ となるので

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h\to 0} \Delta = \lim_{k\to 0} \Delta = \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^y(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

- $y = \arctan(x^2)$ の導関数を求めるために必要な極限は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

である。

$$\Delta = \frac{\arctan(x+h)^2 - \arctan(x^2)}{h}$$

とおく。$y = \arctan(x^2)$ とおくと

$$x^2 = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$k = \arctan(x+h)^2 - y$ とおくと $\arctan(x+h)^2 = y + k$ より

$$(x+h)^2 = \tan(y+k) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y + k < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\tan(y+k) - \tan y &= (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 \\ &= 2xh + h^2 = h(2x+h)\end{aligned}$$

より

$$h = \frac{\tan(y+k) - \tan y}{2x+h}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{k}{\tan(y+k) - \tan y}(2x+h) = \frac{k(2x+h)}{\dfrac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)} - \dfrac{\sin y}{\cos y}} \\
&= \frac{k(2x+h)\cos(y+k)\cos y}{\sin(y+k)\cos y - \sin y \cos(y+k)} = \frac{k(2x+h)\cos(y+k)\cos y}{\sin(y+k-y)} \\
&= \frac{k(2x+h)\cos(y+k)\cos y}{\sin k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigl(\arctan(x^2)\bigr)' &= \lim_{h\to 0} \Delta = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\sin k} \lim_{h\to 0} \bigl((2x+h)\cos(y+k)\cos y\bigr) \\
&= 2x\cos^2 y = \frac{2x\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{2x}{1+\tan^2 y} \\
&= \frac{2x}{1+x^4}
\end{aligned}$$