数学序論要綱 $\sharp 1$

1 命題と論理

数学的論理 $\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ 日常的論理
同じ面 違う面

この章では数学的「論理」について学ぶ。数学的論理は「論理」という言葉を使用しているので，勿論日常用いられている「論理」と深い関係にある。

しかし数学的論理は厳密だが，一般に使われている論理の全てを定式化できているわけではない。一般に使われている論理には，「正しい」「間違っている」以外にも，「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである。

我々は以下で「論理」を取り扱うが広い意味の論理と区別したい時には**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。この章で学ぶ「論理」は数学のひとつの分野であるが，それに留まらない。数学の基礎にあるのが論理であり，論理の理解なしに，数学の理解はないことは肝に銘じておいて欲しい。

我々の脳は論理を考えるために進化したのではなく，進化した結果たまたま「論理も考えられる」ようになったようである。これは我々が自転車に乗れるようになるために直立歩行を始めたのではなく，直立歩行を始めた結果たまたま「自転車にも乗れるようになった」のと事情は同じであろう。自転車に乗るために練習が必要であるように，論理をきちんと扱うためには練習が必要である。

1.1 論理積・論理和

真または偽であることが定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。

例をいくつか見よう。命題自身に P のように名前をつける。

$$P_1 \ : \ 1 = 1$$

P_1 は「1 は 1 に等しい」という内容をもち，正しい命題である。数式で書いてあっても，言葉で書いてあっても内容は同じである。

$$P_2 \ : \ 1 \neq 1$$

P_2 は正しくない命題である。真偽が定まっているのが命題なので，正しくなくても命題である。

$$P_3 \ : \ 12345\ \text{は大きな数である。}$$

P_3 は真偽が確定しているとは言いがたいので命題ではない。ただし，たとえば「10000 以上は大きな数である」ことが事前に約束されている場合は正しい命題となる [(1)]。

2 以上の自然数 p が p および 1 以外の自然数で割り切れないとき p を素数と呼ぶ。p と $p+2$ が共に素数のときこれらを双子素数と呼ぶ。3 と 5，11 と 13 などが双子素数の例である。

$$P_4 \ : \ \text{双子素数は無限個存在する。}$$

この言明の真偽は今のところ知られていない。コンピュータで計算すると途切れることなく，大きな双子素数が見つかることから，「無限個存在するであろう」という予想はあるが，証明はされていない。

真偽の知られていない数学的言明に対する態度は 2 つある。(無意識な場合も含め) 多くの数学者の立場は「素数という概念が確定したものである以上，双子素数は無限に存在するかしないかのいずれかであって，真偽が知られていないだけであり，真か偽かは確定しているので P_4 は命題である」というものである。少数であるが次の様な意見もある。「すべての叙述の真偽があらかじめ定まっているということはできない。証明ないし反証されて初めて真偽が確定すると考えられる。よって P_4 を命題と呼ぶことはできない。」このような立場を**直感主義** (*intuitionism*) と呼ぶ。どちらかが正しいという事ではないが，我々は一応前者の立場を採用しておこう。

$$P_5 \ : \text{「クレタ人は嘘つきである」とエピメニデスが言った。}$$

エピメニデスはクレタ島のクノッソス生まれの詩人・預言者である。エピメネデスがクレタ人であるという点がポイントである。

「クレタ人が嘘つきである」という言明が正しいとすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきである。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは嘘なので，クレタ人は嘘つきではない。

「クレタ人が嘘つきである」という言明が間違いだとすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきではない。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは正しいので，クレタ人は嘘つきである。

---

(1) このような状況を「文脈依存」と呼ぶことがある。日常ではそれが明示的に表現されていない場合も多い。

この様にいずれの場合も「クレタ人は嘘つきでありかつ嘘つきでない」という矛盾が発生する。矛盾を発生させる P_5 のようなものを**自己矛盾命題** (*self–contradictory proposition*) と呼ぶ。「命題」と呼んでいるがここで定義した意味での命題ではない。

演習問題 1.1　次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。

(1) $P_1 : 1 \geq 1$ [(2)]
(2) $P_2 : 2^{2016}$ は素数である。
(3) $P_3 :$ 12345 は 3 で割り切れる。
(4) $P_4 :$ 微分可能な関数は連続である。
(5) $P_5 :$ 連続な関数は微分可能である。
(6) $P_6 :$ 数学は難しい。
(7) $P_7 : n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。**「かつ」**(論理積，logical product, 合接，conjunction)，**「または」**(論理和，logical sum, 離接，disjunction)，**「… でない」**(否定，negation)，**「ならば」**(含意，inplication) などがそれである。次の記号を使用する。

$\neg P$	:	P でない
$P \vee Q$	:	P または Q である
$P \wedge Q$	:	P かつ Q である
$P \implies Q$	:	P ならば Q である。

それぞれの記号の意味はほとんど明らかかもしれない。しかし，きちんと議論するためには次の様な**真理値表 (真理表)**(*truth table*) を使って定義する。T は**真** (*true*)，F は**偽** (*false*) を表す。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \wedge Q, \neg P$ の様に命題 $P, Q, \ldots$ と $\wedge, \vee, \neg$ を使って作られる言明を**論理式** (*fomula*) という。

(2) この講義では「大なりイコール」にこの記号「$\geq$」を用いる。同様に「小なりイコール」に記号「$\leq$」を用いる。

真理値表は左側に論理式を構成する命題 $P, Q, \ldots$ を書き，その真偽のすべての組み合わせを縦に書く。そしてその右側に必要な論理式の欄を作り，その真偽を書いていく。

いくつか注意をする。最初に「または」である。日常では「一方のみが正しいとき正しい」という使われ方をする時がある。

> 「ランチにはコーヒーまたは紅茶が付いております。」
> 「両方下さい。」

レストランではダメかもしれないが，数学的論理の「または」の使用法としては間違っていない。数理論理学でこのような「または」の使い方に対応するものとして**排他的論理和** (*exclusive OR*) がある。排他的論理和は P と Q が共に真のときは偽になるが，それ以外は論理和 (「または」) と同じである。日常では「または」は「論理和」にも使われるし,「排他的論理和」にも使われる。我々はそれを文脈依存で判断しているということになる。数理論理では「または」は「論理和」に用い「排他的論理和」には使用しない。

「$P \implies Q$」にも注意が必要である。日常の論理では

仮定部分 (P) が正しければ結論部分 (Q) が正しい

という使われ方はするが，仮定部分が偽のときの議論はあまりされない。数理論理ではすべての場合に真偽が定まっていなければならないので,「仮定が偽である」ときにも「$P \implies Q$」[3] の真偽を確定させておかなくてはならない。

結論から先に言うと数理論理では

仮定が偽なら「$P \implies Q$」は真

としている。何故その様に決めるのだろう。そのことについて考える。

次の命題は正しいであろうか。

$$x = 1 \implies x^2 = 1 \tag{1}$$

この命題 (1) は正しい命題と考えるのが当然と思うかもしれない。しかし仮定が偽で結論が偽のとき，命題が偽と定義した世界に我々がいると考える。その世界では $x = 2$ のとき，命題は

$$2 = 1 \implies 2^2 = 1$$

[3] 命題「$P \implies Q$」に対し，仮定 P の真偽，結論 Q の真偽，命題「$P \implies Q$」の真偽を混同しないこと。「$P \implies Q$」が正しいからといって，仮定や結論が正しいわけではない。

であり，仮定・結論ともに偽となる。そのような世界では命題 (1) は偽としなければならない。

仮定が偽で結論が真のとき偽と定義した世界を考える。その世界では $x = -1$ のとき，

$$-1 = 1 \implies (-1)^2 = 1$$

仮定が偽，結論が真となり，命題 (1) は偽となる。このような世界では数学はかなりやりにくい。

以上の様な事から「ならば」の真偽は前述の真理値表のように定義することとする。「ならば」は論理では重要な概念であり，この概念をしっかり理解することが大切である。後で「必要条件・十分条件」を学ぶ所でまた取り上げるが，十分注意が必要な概念であることは強調しておく。

我々がよく使っている記号「 , 」**カンマ** (*comma*) にも注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$$x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて } x = -1, 1$$
$$x \text{ は } x > 0,\, x^2 = 1 \text{ を満たすので } x = 1$$

最初のカンマは「または」で 2 番目のカンマは「かつ」である。実際試験の解答でも，自分で書いたカンマを誤解して間違うという例を見かける。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

論理式の中には P の真偽によらずつねに真である論理式 $P \vee \neg P$ や，つねに偽である論理式 $P \wedge \neg P$ もある。つねに真である論理式は**恒真命題** (*tautology*) と呼ばれる。常に偽である命題は**矛盾** (*contradiction*) と呼ばれる。

$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。論理式 X, Y に対し

> $X \Longleftrightarrow Y$ が恒真命題であるとき，X と Y は**同値** (*equivalent*) であるといい，$X \equiv Y$ と表す。

命題 1.1 [4]　次が成立する。

(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ (2 重否定の法則)

[4] ここの「命題」という用語の使い方は最初に定義した「命題」とは異なる。この様に 1 つの用語が 2 つ以上の意味で使われることもある。

定理・補題・系・例・演習問題などと並んで数学で使われており，この要綱で使われる。ここでの命題の意味は「正しい命題であって，理論体系のなかで重要な言明」ぐらいに解釈しておいてほしい。同様に定理は「正しい命題であって，理論体系のなかで特に重要な言明」，補題は「定理，命題を証明するために用いる言明」，系は「定理などから容易な考察によって導出される言明」に用いる。定理・命題・補題・系の区別は絶対的なものではなく人により異なる用語が使われることは勿論ある。

(2) $P \wedge P \equiv P$，$P \vee P \equiv P$ (巾等律)
(3) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$，$P \vee Q \equiv Q \vee P$ (交換律)
(4) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ (結合法則)
(5) $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ (結合法則)
(6) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$，$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ (吸収法則)
(7) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (分配法則)
(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (分配法則)
(9) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(10) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(11) $(P \implies Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

証明　ここでは (11) のみ証明して残りは演習問題とする。

(11) を証明するためには，真理値表をつくって比較すればよい。U を $\neg P \vee Q$，V を $P \implies Q$ とする。定義より $U \implies V$ と $V \implies U$ が恒真命題であることを示せばよい。U の真偽を決めるためには $\neg P$ が必要なので，それを考慮して真理値表をつくると次のようになる。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \implies Q$	U $\implies$ V	V $\implies$ U
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$U \implies V$ および $V \implies U$ の真偽の欄がすべて T なので $U \implies V$ および $V \implies U$ は恒真命題である。 ∎

証明はこれで十分なのだが，次のような証明も考えられる。$U \implies V$ が恒真命題を示すためには真理値表に $U \implies V$ の欄を作らなくてもよい。U $(\neg P \vee Q)$ と V $(P \implies Q)$ の真理値表での対応する欄の真偽が一致していれば，$U \implies V$ と $V \implies U$ ともに真になり恒真命題であることが分かる。そこで次のような証明が考えられる。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\neg P \vee Q$ と $P \implies Q$ の対応する欄の真理値が同じなら同値であるし，異なる部分があれば同値ではない。

上の真理値表から分かるように，$\neg P \vee Q$ と $P \implies Q$ の対応する欄の真理値は一致しているので，同値であることが分かる。

演習問題 1.2　真理値表を用いて命題 1.1 を証明せよ。

命題 1.1 を証明するのには真理値表を用いた。基本性質を証明した後では，真理値表に戻らなくとも，証明した性質を用いて命題を証明することができる。

命題 1.1 と次に述べる命題 1.2 を用いれば命題論理で成立するすべての性質を証明できることが知られている。

命題 1.2 恒真命題を $\mathbb{T}$，矛盾命題を $\mathbb{F}$ とすると次が成立する。
(1) $\neg\mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$，$\neg\mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$
(2) $P \wedge \mathbb{T} \equiv P$，$P \vee \mathbb{F} \equiv P$
(3) $P \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$，$P \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$
(4) $P \wedge \neg P \equiv \mathbb{F}$ (矛盾律)
(5) $P \vee \neg P \equiv \mathbb{T}$ (排中律)

(5) のみ証明して後は演習問題とする。$\mathbb{T}$ は真理値表でいうと T の欄しかない命題であり，$\mathbb{F}$ は真理値表でいうと F の欄しかない命題である。真理値表を書くと次の様になる。

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$\mathbb{T}$
T	F	T	T
F	T	T	T

対応する欄の真理値が同じなので同値である。

演習問題 1.3　真理値表を用いて命題 1.2 を証明せよ。

前に述べたように命題 1.1,1.2 を証明した段階では真理値表を用いなくてもこれらの命題のみを用いて証明することが可能になる。

背理法 (*reduction to absurdity*) を考える。背理法とは，仮定 (P) と結論の否定 $(\neg Q)$ から矛盾を導くことで，$P \implies Q$ を証明する論法である。背理法は次が成立することを前提にしている論法である。

$$(P \implies Q) \equiv (P \wedge \neg Q \implies \mathbb{F})$$

これを命題 1.1,1.2 を用いて真理値表を使わずに証明する。

$$\begin{aligned}
P \wedge \neg Q \implies \mathbb{F} &\equiv \neg(P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F} && \text{命題 1.1 (11)} \\
&\equiv \neg(P \wedge \neg Q) && \text{命題 1.2 (2)} \\
&\equiv \neg P \vee \neg(\neg Q) && \text{命題 1.1 (9)} \\
&\equiv \neg P \vee Q && \text{命題 1.1 (1)} \\
&\equiv P \implies Q && \text{命題 1.1 (11)}
\end{aligned}$$

演習問題 ***1.4** [5]

次を真理表を使わずに証明せよ。ただし，(4)，(5) は命題がトートロジーであることを示せ。

(1) $\neg(P \implies Q) \equiv P \wedge \neg Q$

(2) $(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$ **対偶** $(contraposition)$

(3) $(P \implies (Q \implies R)) \equiv (Q \implies (P \implies R))$

(4) $((P \implies Q) \implies P) \implies P$

(5) $((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$

日常生活に関する叙述の対偶では時間などが逆転するため，一見するとおかしな命題になることがある。このような場合，時間逆転等を考慮して表現を修正すると自然に見える対偶命題をつくることができる。

演習問題 1.5 次の命題 (?) の対偶命題をつくれ。

(1) 彼は怒られないと勉強しない。

(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

最後はパズル的な問題です。

演習問題 1.6 (天国への道) ある人が死んで，あの世への道を歩いてゆくと，二又に分かれた分岐点に出た。一方の道は天国に通じ，もう一方の道は地獄への道である，ということはわかっているが，どちらが天国への道なのかはわからない。その分岐点には一匹の悪魔がいて，yes or no で答えられる質問に１回だけ答えてくれる。しかし悪魔には，常に正直に答える正直悪魔と，常にウソを答えるウソつき悪魔の２種類がいて，そこにいるのがどちらなのかは，全くわからない。

さて，１回だけの質問で，天国への道を知るには，いったいどのような質問をすればよいのだろうか？

Hint: 命題 A を「右の道は天国への道である。」というものとし，命題 B を「あなたは正直な悪魔である。」としてみよう。これらの命題とその否定を，真理値表を使って，うまく組み合わせる。

---

[5] これからときどき演習問題に星印 $(*)$ が付くことがある。星印の付いた演習問題は発展的であり内容の深い理解のための問題であるが，全員が解く事を要求していない。興味のある人を対象と考えている問題である。