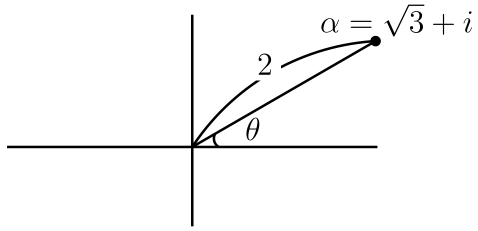
数学序論要綱 ♯8

3.3 複素数の極形式とオイラーの公式

ここでは，複素数に対する極形式，オイラーの公式を与え，複素数の積の幾何学的意味を考える。

まず例から始めよう。$\mathbb{C}$ と複素平面の同一視の下で，複素数 $\alpha = \sqrt{3}+i$ の表す平面内の点 α を考える。α と実軸の正の向きとがなす角を θ とし (今の場合 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$)，$\sqrt{3}+i$ を α の絶対値と θ で表すと次図の様になる：



$$|\alpha| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\sqrt{3}+i = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

と表すことができる。この表示を**極形式**という。

一般の場合を考えよう。複素数 $\alpha = a+bi$ に対して，ベクトル α と実軸の正の向きとが作る角を θ とおく。このとき，θ の範囲は，

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

の範囲で唯 1 つ定まる ($0 \leq \theta < 2\pi$ という制限をつけなければ θ の選び方には $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ だけの不定性があることに注意する)。ベクトル α の長さを r とすると

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} \iff a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

が成り立っている。 従って，

$$\boxed{\alpha = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

を得る。この複素数の長さ (絶対値) 及び角度 θ を用いた表示を複素数 α の**極形式**という。θ を α の**偏角**と呼び，α の偏角を $\arg\alpha$ と書

く。ただし，α から $\arg\alpha$ が一意的に決まるものでないことに注意すること。

演習問題 3.5　次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。
(1) $1+i\sqrt{3}$　(2) -2　(3) i　(4) $2\sqrt{3}-2i$　(5) $1-\sqrt{3}i$

虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ を，天下り的に次の式で定める：

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

これを**オイラーの公式**(1) と呼ぶ。この公式が何故成立するかに関しては解析学 I で学ぶが，ここでは成立するものとして議論を進める。

e^X において X が複雑な式になる場合もある。そのときは

$$\exp X=e^X$$

という表示をすることもある。例えば正規分布は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

などと書かれる。

オイラーの公式において，θ を $-\theta$ に置き換え，$\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ を用いると

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

が得られることに注意する。

演習問題 3.6　次の問に答えよ。
(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数 $e^{i\theta}$ に対しても実数の指数関数 e^x と同様に指数法則が成り立つのか気になるが，次の定理が成り立つ：

定理 3.4 虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ に対して指数法則が成り立つ：

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

(1)オイラーの公式と呼ばれるものは沢山あって，一般の場合「オイラーの公式」といってもどれを指すか不明確だが，数学序論および解析学 I,II ではこの公式を指すものと約束する。

証明　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と三角関数の加法定理より，

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

となり指数法則が成立している。∎

注意 3.5 [**指数法則＝加法定理**] この定理の逆，すなわち，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則を仮定することにより，三角関数の加法定理が証明できる。実際，オイラーの公式より

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2)
\end{aligned}$$

であり一方，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

なので，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則 ($e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$) より三角関数の加法定理を得る。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.6 [**ド・ モアブルの公式**] 自然数 n に対して，

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.4 において，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば，$(e^{i\theta})^2 = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}$ が成り立つ。さらに定理 3.4 を適用すれば，

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2\cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta}e^{i\theta} = e^{i3\theta}$$

を得る。以下，同様にして任意の自然数 n に対して，$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ が成り立つことが分かる。(きちんと示すには数学的帰納法を用いる。演習問題 3.7 参照)。∎

演習問題 3.7　次の問に答えよ。
(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
(2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.7 複素数 α, β に関し次が成立する。

(1) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

(2) $\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta$

証明　$\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, \beta = r_2 e^{i\theta_2}$ と表されているとする。このとき

$$\alpha\beta = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

となる。$|\alpha\beta| = r_1 r_2 = |\alpha| \cdot |\beta|$ であり，$\arg(\alpha\beta) = \theta_1 + \theta_2 = \arg\alpha + \arg\beta$ となる。∎

(1) はすでに演習問題 3.3 で扱っている。偏角に関しては注意が必要である。偏角は一意的に決まらない。α の偏角と β の偏角を定めたとき，$\alpha\beta$ の偏角で $\arg\alpha + \arg\beta$ になるものが**存在する**ということである。$\alpha, \beta, \alpha\beta$ の偏角をたとえば 0 と 2π の間にとったときは一般に成立しない。

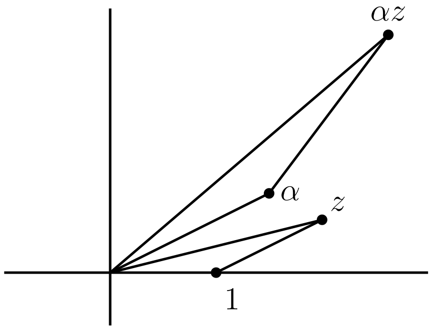


図 3.2

複素数の極形式の話に戻ろう。複素数 $\alpha = a + ib$ の絶対値を r，偏角を θ とする。オイラーの公式を用いると極形式は，次の様に書き直せる：

$$\boxed{\alpha = a + ib = re^{i\theta}}$$

これもまた複素数 α の**極形式**と呼ぶ。ここで，

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha| \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

であった。 この極形式を用いて，複素数の積の幾何学的意味を理解しよう。

$$\alpha = r_0 e^{i\lambda}, \qquad z = re^{i\theta}$$

とおく。

複素数をベクトルと見なすと，ベクトル α は長さが r_0 で実軸の正の向きとの成す角が λ のベクトル，z は長さが r で実軸の正の向きとの成す角が θ であるベクトルである。このとき，複素数としての積は,

$$\alpha z = r_0 e^{i\lambda} r e^{i\theta} = r_0 r e^{i(\lambda+\theta)}$$

であるから，ベクトル z は，複素数 α を掛けることにより，長さが r_0 倍，実軸の正の向きから λ だけ回転されたベクトル αz に変換された。これが複素数の積の幾何学的意味である。とくに，$r_0 = 1$ のとき，αz は z を λ だけ反時計回りに回転させたベクトルである。

特に $|\alpha| = r_0 = 1$ のとき αz は z を原点の回りに λ だけ回転させたベクトルになっている。$i = e^{i\pi/2}$ なので i をかけることは原点の回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させることになる。

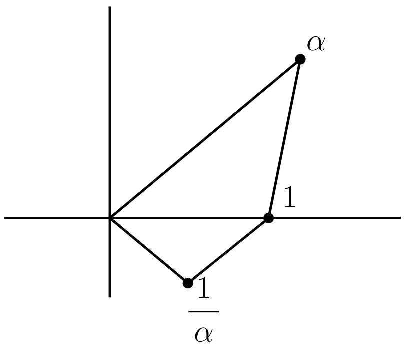


図 3.3

図 3.2 において $z = \dfrac{1}{\alpha}$ とおくと，$\alpha z = 1$ なので図 3.3 のようになる。すなわち $\dfrac{1}{\alpha}$ の偏角は α の偏角の符号入れ替えたものであり，絶対値は逆数になっている。すなわち

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r_0}e^{-i\lambda}$$

となっている。α で割ることは $\dfrac{1}{\alpha}$ をかけることなので，z を α の偏角だけ時計回りに回転させ，α の絶対値で割ったものが商になる。

代数的には，

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{re^{i\theta}}{r_0e^{i\lambda}} = \frac{r}{r_0}e^{i(\theta-\lambda)}$$

となっている。

注意 3.8 z や α の偏角が 0 から 2π の範囲に入っていても，αz や $\dfrac{z}{\alpha}$ の偏角が 0 から 2π の範囲に入っているとは限らない。

演習問題 3.8　次の点を極形式で表し図示せよ。なお (3)，(4) は点 α, β を用いて作図により与えよ。

(1) $\alpha = 2 + 2i$　　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

(3) $\alpha\beta$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

1 の n 乗根　任意の正の整数 n に対して，

$$z^n = 1$$

が成り立つとき，z を 1 の n **乗根**と呼ぶ。$|z|^n = 1$ 且つ $|z| > 0$ より，$|z| = 1$。すなわち，複素数 z は原点を中心とした半径 1 の円上の点である。そこで，$z = e^{i\theta}$ とおけば，ド・モアブルの公式より，

$$e^{in\theta} = 1.$$

従って，

$$n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る。これより，方程式 $z^n = 1$ の解は,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\cdots \\
\exp\left(\frac{2(n-1)\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{2\pi n i}{n}\right) &= 1
\end{aligned}$$

の n 個である。

演習問題 3.9
(1) 1 の 4 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(2) 1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(3) 1 の 6 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(4) 1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

演習問題 3.10 $z = e^{2i}$ とするとき，次の問いに答えよ。
(1) z,z^2,z^3,z^4 を複素平面に図示せよ。
(2) 異なる自然数 m, n に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし π が有理数でないことは既知としてよい。

演習問題 3.11
(1) $z = e^{i\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{1}{2}\right)$ とする。z, z^2, z^3, z^4 を複素平面に図示せよ。
(2) n を自然数とし，$z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\dfrac{1}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^{29} までは第 1 象限にあり，z^{30} で初めて第 2 象限となった。n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。