

4.2 単調関数と逆関数

定義 4.3 $f(x)$ を区間 I 上で定義された関数とする。

- (1) 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ となる時, f は単調増加であるという。
- (2) 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となる時, f は単調減少であるという。
- (3) 単調増加関数か単調減少関数を単に単調関数という。

次の命題が成立する。

命題 4.4 f を区間 I 上の単調関数とする。このとき $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は単射である。

演習問題 4.6 命題 4.4 を証明せよ。

I, J を \mathbb{R} の区間とする。 I 上の関数 $f: I \rightarrow J$ が全単射であるとする。この時, 逆写像 $f^{-1}: J \rightarrow I$ が存在するが, これを $f: I \rightarrow J$ の逆関数 (inverse function) という。

定義 4.5 関数 $f: I \rightarrow J$ が点 a ($a \in I$) で連続 (continuous) とは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ⁽¹⁾ が成立することをいう。定義域 I のすべての点で連続のとき, 関数 f は I で連続といい, f を連続関数 (continuous function) と呼ぶ。

定理 4.6 [中間値の定理] 閉区間 $I = [a, b]$ に対し $f: I \rightarrow J$ は連続とする。 $f(a)$ と $f(b)$ の間の値 μ に対し $f(c) = \mu$ となる c ($a < c < b$) が存在する⁽²⁾。

命題 4.7 $f: I \rightarrow J$ を単調増加で連続な関数とする。

I が閉区間 $[a, b]$ のとき J も閉区間 $[\alpha, \beta]$ とする。

I が开区間 (a, b) のとき J も开区間 (α, β) とする。

I が半开区間 $[a, b)$ のとき J も半开区間 $[\alpha, \beta)$ とする。

I が半开区間 $(a, b]$ のとき J も半开区間 $(\alpha, \beta]$ とする。

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \beta$ が成立しているときいずれの場合も $f: I \rightarrow J$ は全単射である。

⁽¹⁾極限は高校で扱っているが, 5章でも扱う。

⁽²⁾この定理のきちんとした扱いは後期の解析学 I で扱い, ここでは結果のみを紹介する。

演習問題 *4.7 定理 4.6 を用いて命題 4.7 を証明せよ。

演習問題 *4.8 命題 4.7 と同様の結果が単調減少関数に関しても成立する。すなわち次が成立する。

$f: I \rightarrow J$ を単調減少で連続な関数とする。

I が閉区間 $[a, b]$ のとき J も閉区間 $[\alpha, \beta]$ とする。

I が开区間 (a, b) のとき J も开区間 (α, β) とする。

I が半开区間 $[a, b)$ のとき J も半开区間 $[\alpha, \beta)$ とする。

I が半开区間 $(a, b]$ のとき J も半开区間 $(\alpha, \beta]$ とする。

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \beta, \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \alpha$ が成立しているときいずれの場合も $f: I \rightarrow J$ は全単射である。

このことを演習問題 4.7 を既知として証明せよ。

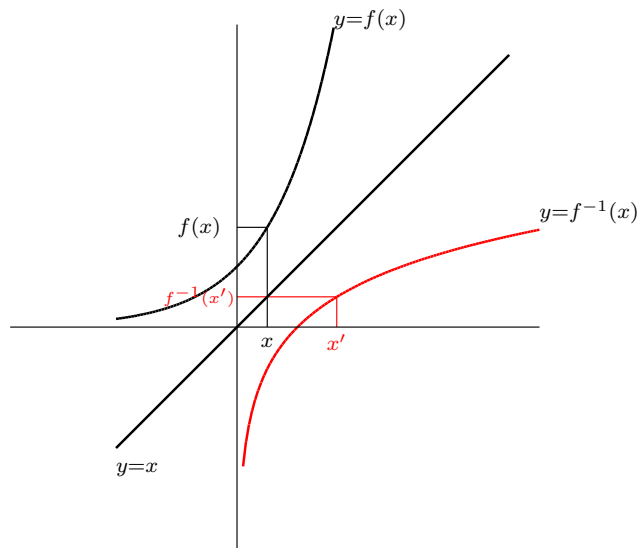
逆関数のグラフ

関数 $f: I \rightarrow J$ のグラフとは、平面上の $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ という集合のことであった。 $f: I \rightarrow J$ が全単射である時、逆関数 $f^{-1}: J \rightarrow I$ を考える。

$x \in I$ に対して $f(x) = x'$ とすると $x' \in J$ であり $f^{-1}(x') = x$ である。すなわち、

$$(x', f^{-1}(x')) = (f(x), x)$$

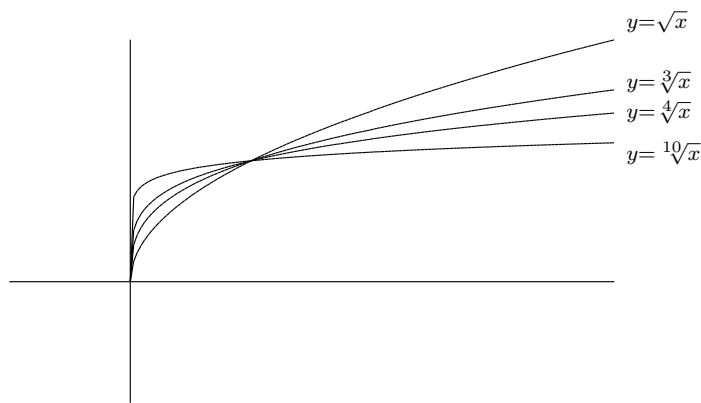
となっている。このことは、 f^{-1} のグラフ上の点 $(x', f^{-1}(x'))$ は $(f(x), x)$ という点であり、これは、 $f(x)$ のグラフ上の点 $(x, f(x))$ と、対角線 $y = x$ に関して対称な位置にある点である。



このことから、次が成り立つ。

命題 4.8 $f : I \rightarrow J$ のグラフと $f^{-1} : J \rightarrow I$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して互いに対称な位置にある。

$n \geq 2$ を自然数とし、 $f(x) = x^n$ という関数を考える。ただし定義域は $[0, \infty)$ 、終域は $[0, \infty)$ とする。このとき $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は単調増加な連続関数である。また $f(0) = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ なので全単射である。よって逆関数 $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する。これがべき根関数と呼ばれる $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ という関数である。特に $n = 2$ のとき $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ と書く。



べき根関数の定義を式で書くと

$$y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n \quad (y \geq 0)$$

である。これは知られた関数への「翻訳」と考えることができる。逆関数として定義された関数の性質を調べるには、この「翻訳」を用いるしかない。

例として $\sqrt{a^2} = |a|$ を示そう。「翻訳」を適用すると

$$b = \sqrt{a^2} \iff a^2 = b^2 \quad (b \geq 0)$$

となる。 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 0$ より、 $b = a$ または $b = -a$ である。 $b \geq 0$ より、 $a \geq 0$ のときは $b = a$ 、 $a < 0$ のときは $b = -a$ なので $b = |a|$ である。

4.3 指数関数

指数関数 a^x は、最初は x が自然数の場合から始めて実数まで拡張された⁽¹⁾。拡張の方針は、有理数までは指数法則が成立するように拡張して行き、実数は連続性が保たれるように拡張する。

⁽¹⁾オイラーの公式に見るように、最終的には複素数まで拡張されるが、ここでは実数までの拡張を考える。

定義 4.9 [自然数] a を正の実数⁽²⁾ とする。自然数 n に対して, a を n 回かけて得られる実数を a^n と表す。すなわち

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$$

と定義する。

この定義は「 \cdots 」が入っている。その意味では「ごまかし」のある定義なので正確には次の様に帰納的に定義する。

- (1) $n = 1$ のとき $a^1 = a$ と定義する。
- (2) $n = k$ のとき a^k が定義されているとすると, $a^{k+1} = a^k \cdot a$ と定義する。

命題 4.10 [指数法則 (自然数)] a を正の実数とする。任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

証明は冪乗の個数を数えることで得られる (厳密には数学的帰納法が必要になる)。

演習問題 4.9 命題 4.10 を数学的帰納法で証明せよ。

定義 4.11 [整数] (1) $a^0 = 1$ と定義する。

(2) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ と定義する。

(3) n が負の整数のとき, $n = -p$ とおくと p は自然数である。このとき $a^n = (a^{-1})^p$ と定義する。

以上から, 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して a^n が定義されたことになる。

この定義から, 指数法則が整数に対し拡張される。

命題 4.12 [指数法則 (整数)] a を正の実数とする。任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

演習問題 4.10 命題 4.12 を証明せよ。ただし自然数に対し指数法則が成立すること (命題 4.10) は用いてよい。ヒント: 最初に任意の整数 n に対し $a^n \cdot a = a^{n+1}$, $a^n \cdot (a^{-1}) = a^{n-1}$ が成立することを示せ。それをを用いて n が正の場合と負の場合に分け帰納法で示せ。

等比数列の性質から, 次が成り立つ。

⁽²⁾ 正ということに注意すること。 x が整数の場合は負の実数 a に対して a^x を定義することはできるが, x が有理数の場合まで拡張すると, a が負の場合は a^x を「うまく」定義することができない。

命題 4.13 (1) $a > 1$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = 0$$

(2) $0 < a < 1$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = \infty$$

演習問題 *4.11 命題 4.13 を証明せよ。

次に a の有理数乗 を定義する。

定義 4.14 [有理数] (1) 自然数 n に対して, a の n 乗根を $a^{1/n}$ と表す。すなわち $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ と定義する。

(2) n が負の整数の場合 $n = -p$ とおくと p は自然数である。このとき $a^{1/n}$ を $\frac{1}{a^{1/p}} = (a^{1/p})^{-1}$ として定義する。

(3) p/q を 0 ではない有理数とする。ここで p, q は 0 ではない整数である。 $a^{p/q}$ を,

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p$$

と定義する。

(4) $r = p/q = s/t$ を 0 ではない有理数とする。 $(a^{1/q})^p = (a^{1/t})^s$ となるのがわかる (演習問題 4.12 参照)。これにより, a^r を $(a^{1/q})^p$ により定義できる。

(5) 以上から, 任意の有理数 r に対して a^r が定義された。

このように, べき根を分数指数によって表記するという方法は, 1628 年にフランスのアルベール・ジラル드가著した『代数における新発見』で初めて導入された。

この様に有理数まで指数関数を拡張したとき, 整数に対して成立する指数法則が有理数について成立するののかということが問題になる。そのことを示すのが次の演習問題である。また有理数に対する単調性の成立も示している。

演習問題 *4.12 a は正の実数とする。

(1) p, q が 0 ではない整数の時, $(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}$ を示せ。

(2) p, q, s, t が 0 ではない整数であって $p/q = s/t$ となっている時, $(a^{1/q})^p = (a^{1/t})^s$ となることを示せ。

(3) 任意の有理数 u, v に対して, 次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v} = a^u a^v, \quad (a^u)^v = a^{uv}$$

(4) 任意の有理数 u に対して $a^u > 0$ を示せ。

(5) $1 < a$ の時, 有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u < a^v$ を示せ。

(6) $0 < a < 1$ の時, 有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u > a^v$ を示せ。

有理数まで拡張してきたが, 次に実数までの拡張を考える。ここで拡張の方針が変わる。今までは指数法則が成立するように拡張してきたが, その方針ではうまくいかない⁽³⁾。そこで「連続性」が成立するように拡張することにする。次の疑問から始める。

2^π をどの様に定義するか

「 $2^{\text{有理数}}$ 」は定義されているので, それを用いる。 π に収束する有理数列を考える。例えば a_n を π を小数点 $n + 1$ 桁で切り捨てて得られる数列とする。すなわち,

$$a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, \dots$$

とする。このとき

$$2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \dots$$

という数列を考える。有理数 a に対して 2^a は定義されているので, 数列が定まる。そこでこの数列の極限を 2^π と定義するのである。グラフでいうと $y = 2^x$ ($x \in \mathbb{Q}$) というグラフを考え, それを関数が連続になるように拡張することになっている。

定義 4.15 [実数] 任意の実数 x に対して a^x を定義することを考える。 x が無理数であっても, そのいくらでも近くに有理数がある。すなわち x に収束する有理数の数列 r_n がある。 a^x の値を

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

として定義する。

これにより本当に正しく定義されていることを証明するのは, 実数の連続性などが絡んでくるのでかなりやっかいであり, ここでは述べない⁽⁴⁾。「有理数上まで定義して, あとは連続的に実数全体に拡張した」と理解してもらえば良い。

これにより, 全ての实数 x に対して a^x が定義された。これを x の関数と見た時 指数関数 という。

指数関数 a^x の性質をまとめる。

(1) 正の実数 $a > 0$ に対して定義される。

⁽³⁾正確にいうと, 指数法則を満たすように実数に拡張する方法は無限に沢山ある。「指数法則を満たすように拡張する」という方針ではどれを選んでいいかわからない。

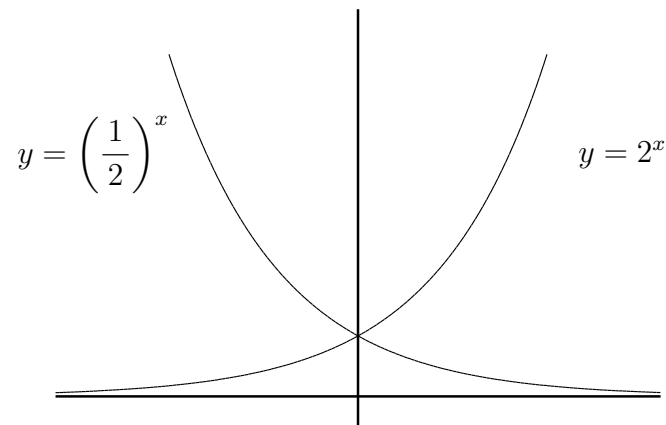
⁽⁴⁾ x に収束する有理数列が2つあったとし, それを r_n, s_n としたとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$ を示す必要がある。

- (2) 任意の実数 x に対して $a^x > 0$
 (3) [指数法則] 任意の実数 s, t に対して $a^{s+t} = a^s a^t$, $(a^s)^t = a^{st}$
 (4) $1 < a$ ならば a^x は単調増加。すなわち, $s < t \implies a^s < a^t$
 (5) $0 < a < 1$ ならば a^x は単調減少。すなわち, $s < t \implies a^s > a^t$
 (6) $0 < a < 1$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

- (7) $1 < a$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



(1) ~ (5) は, x が有理数の場合に成り立つ性質だったが, 実数全体に連続的に拡張したので, やはり成り立つ。(6), (7) については, 整数の場合について成り立っているが, (4), (5) の a^x の単調性から, 実数の場合でも成り立つ。