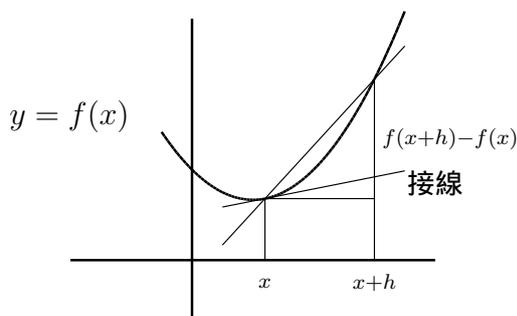


5.3 定義と基本性質

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x においてこの極限が存在するとき, f は x で微分可能 (differentiable) であるという。 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を x から $x+h$ までの $f(x)$ の平均変化率 (average change rate) と呼ぶので, 平均変化率の $h \rightarrow 0$ のときの極限である。次図の様に導関数の値とは, 幾何的には関数 f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きと考えることができる⁽¹⁾。



定義域の各点で微分可能であるとき, 関数 f は微分可能 (differentiable) であるという。ただし f の定義域が閉区間 I のとき区間の左端の点 a で微分可能とは次の右極限が存在する場合をいうとする。

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

右端の点 a の場合は次の左極限の存在する場合をいう。

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$y = f(x)$ の導関数の表し方は次のように色々ある。前2つはニュートン流, 後4つはライプニッツ流である。

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx}(x), \frac{d}{dx}f(x)$$

⁽¹⁾この言い方は数学的には厳密でないかもしれない。というのは理論的には導関数を用いて接線を定義するからである。

微分とは線型近似 (1 次近似) であるという見方は大切である。 f は微分可能とする。今 a を固定して h を変数と考える。 $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ となる。

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

において h が非常に小さいとき, $\varepsilon(h)h$ は (非常に)² 小さいので, この項を無視した残りの項 $f(a) + f'(a)h$ が $f(x) = f(a+h)$ を近似しているという見方が線型近似である。

逆に微分可能な関数 $f(a+h)$ を h に関する 1 次式 $A+Bh$ で $x=a$ のまわりで「近似」する事を考える。 $h=0$ において 1 次関数の値が $f(a)$ になるので $A=f(a)$ である。関数 $f(a+h)$ と 1 次関数の差を $\varepsilon(h)h$ と置く。すなわち $\varepsilon(h)h = f(a+h) - (f(a) + Bh)$ とすると,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - B$$

となる。よって $B=f'(a)$ のとき近似が「一番よい」事が分かる。

関数 $y=f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となると「関数 $y=f(x)$ は a において連続である」という。定義域の各点で連続であるとき, 関数 $y=f(x)$ は連続であるという。上の考察から微分可能な関数は連続であることが分かる (演習問題 5.14)。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ という条件は

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$$

に置き換えることができる。すなわち連続な関数とは極限操作と可換な関数ということができる。

演習問題 5.14 $x=a$ で微分可能な関数は $x=a$ において連続であることを証明せよ。

例 5.12 $f(x) = x^2$ とする。定義に基づいて $f(x)$ の導関数を計算する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

演習問題 5.15 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

(4) $f(x) = a$

$$(5) f(x) = x^4 \qquad (6) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(7) f(x) = \sqrt{x} \qquad (8) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

定義に基づいて計算するのは関数が複雑になると大変になる。そこでいくつかの定理を用意して複雑な関数の計算を実行できるようにする。

定理 5.13 関数 $f(x), g(x)$ は微分可能とし, a は定数とする。

$$(1) (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(2) (af(x))' = af'(x)$$

$$(3) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{積の微分法})$$

証明

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (kf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\ &= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

定理 5.14 [合成関数の微分法] 関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が共に微分可能で合成関数

$z = g \circ f(x) = g(f(x))$ が定義されるとき

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成立する。

[定理 5.14 の不十分な証明]

$y = f(x)$ と $z = g(y)$ との合成関数 $z = g \circ f(x)$ を考える。 $x = a$ における導関数は

$$\frac{dz}{dx}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \circ f(a+h) - g \circ f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

である。 $b = f(a)$, $k = f(a+h) - f(a)$ とおくと , $f(a+h) = f(a) + k = b + k$ であり $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ となるので

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(b+k) - g(b)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{dg}{dy}(b) \frac{df}{dx}(a) = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 *5.16 上の定理 5.14 の証明のどこが不十分か指摘し , 定理の証明を完成させよ。

定理 5.15 [逆関数の微分法] ある区間または実数 \mathbb{R} 全体で定義された関数 f が微分可能かつ単調であるとき , 値域を終域とすると f は全単射であり , 逆写像が存在する。逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

演習問題 5.17 定理 5.14 の成立を仮定して定理 5.15 を証明せよ。

基本的な関数の導関数を理解していることに加え , 積の微分法と合成関数の導関数を用いると種々の導関数を計算することが可能になる。ここである程度複雑な次の関数の導関数を求めてみよう。

$$y = f(x) = e^{x^4+x^3} \sin(x^2+x)$$

ただし , ここでは以下の関数の導関数は既知とする ; $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$

積の導関数より

$$y' = \left(e^{x^4+x^3} \right)' \sin(x^2+x) + e^{x^4+x^3} (\sin(x^2+x))'$$

$z = e^{x^4+x^3}$ の導関数を求めるために $u = x^4 + x^3$ とおく。 $z = e^{x^4+x^3}$ を $z = e^u$ と $u = x^4 + x^3$ の合成関数と見なすと $\frac{dz}{du} = e^u$, $\frac{du}{dx} = (x^4 + x^3)' = (x^4)' + (x^3)' = 4x^3 + 3x^2$ より

$$\left(e^{x^4+x^3} \right)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} = e^u (4x^3 + 3x^2) = (4x^3 + 3x^2) e^{x^4+x^3}$$

である。 $w = \sin(x^2 + x), v = x^2 + x$ とおくと同様に

$$(\sin(x^2 + x))' = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dv} \frac{dv}{dx} = (\cos v)(2x + 1) = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$$

よって

$$y' = (4x^3 + 3x^2) e^{x^4+x^3} \sin(x^2 + x) + (2x + 1) e^{x^4+x^3} \cos(x^2 + x)$$

5.4 いろいろな関数とその導関数

今まで出てきた関数の導関数を確認しておこう。

1) 整関数 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を考える。実数上の関数で x に対し $f(x)$ を対応させる関数を f と書く。これを整関数または多項式関数という。定理 5.13 (3) より

$$f'(x) = a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \cdots + a_1 (x)' + (a_0)'$$

となるので、 $(x^k)'$ が分かれば導関数が求められる。ここでは定理 5.13 (3) と $(x)' = 1$ (演習問題 5.18 参照) を用いて次数の低い所から計算してみよう。 $x^2 = x \cdot x$ に定理 5.13 (3) を適用して

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

となる。 $x^3 = x^2 \cdot x$ に定理 5.13 (3) を適用すると

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

が得られる。任意の自然数 n に対し $(x^n)' = nx^{n-1}$ が予想されるが、これは演習問題にする。

演習問題 5.18 任意の自然数 n に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

演習問題 5.19 演習問題 5.18 は数学的帰納法で求めたが、使わない方法もある。2項定理 $((x+h)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} h^k)$ を用いて

$(x^n)' = nx^{n-1}$ を数学的帰納法を用いず証明せよ。

2) 有理関数 $f(x), g(x)$ を多項式とする。 $\frac{f(x)}{g(x)}$ の形の式を有理式

という。有理式 $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ で定義される関数を有理関数という。

ただしこの関数は分母 $g(x)$ が 0 となる x では定義されない。すなわち定義域は実数全体とは限らない。 $Q(x) = f(x) \frac{1}{g(x)}$ と見なし

て積の微分法を用いると $Q'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$ となる。
 $z = \frac{1}{g(x)}$ を $z = \frac{1}{y}$ と $y = g(x)$ の合成関数と考えると導関数は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2} g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

となる。よって有理関数の導関数は

$$Q'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

となり, $f'(x), g'(x)$ は多項式の導関数なので求める事ができる。

演習問題 5.20 次の有理関数の導関数を求めよ。

$$(1) y = \frac{x-1}{x+1} \quad (2) y = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad (3) y = \frac{1}{x^2+1}$$

3) 無理関数 ここでは無理関数一般でなく n 乗根について述べる。
 $y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ は $x = y^n$ ($y \geq 0$) の逆関数であった。
 $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$ なので定理 5.15 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

となる。無理関数は整関数, 有理関数と違って微分可能でない点が存在する。すなわち定義域の端点では微分可能ではない。

4) 指数関数 5.1 節において e という定数を定義し, 5.1 節および 5.2 節の演習問題において極限に関するいくつかの結果を証明した。
この定数 e は自然対数の底 (*base of natural logarithm*) と呼ばれる重要な定数であり, 指数関数の導関数を考えるためには不可欠の定数である。指数関数の導関数を求めるときキーポイントになる式は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

である。 $y = f(x) = e^x$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \end{aligned}$$

となる。すなわち $(e^x)' = e^x$ が成立している。

一般の正の実数 a に対しては, $a = e^k$ とおくと, $k = \log_e a$ である。 $y = f(x) = a^x$ とおくと $f(x) = (e^k)^x = e^{kx}$ となっている。よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{k(x+h)} - e^{kx}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{kx+kh} - e^{kx}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{kx} \frac{e^{kh} - 1}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{kh} - 1}{kh} k = a^x k \lim_{kh \rightarrow 0} \frac{e^{kh} - 1}{kh} = a^x k = a^x \log_e a \end{aligned}$$

を得る。

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log_e a$$

5) 対数関数 e を底とする対数を自然対数 (*natural logarithm*) といい, 微積分では底を省略する⁽¹⁾。対数関数は指数関数の逆関数として定義されたので, $y = \log x$ のとき $x = e^y$ となる。 $\frac{dx}{dy} = e^y$ なので

$$(\log x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

となる。

$y = \log_a x$ のとき $x = a^y$ となる。 $\frac{dx}{dy} = a^y \log a$ なので,

$$(\log_a x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

となる。

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

6) 三角関数 三角関数の導関数を求めるときキーポイントになる式は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

⁽¹⁾微積分では底を省略すると, 自然対数であるが, 数値計算においては底を省略すると常用対数 (底が 10 である対数) であるのが普通なので注意すること。

である。 $\sin x$ に関する加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

となる。 $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$ に
注意すると, $(\sin x)' = \cos x$ を得る。

$\cos x$ に関しては

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

より $(\cos x)' = -\sin x$ が得られる。

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ である。積の微分法により

$$(\tan x)' = \left(\sin x \frac{1}{\cos x} \right)' = (\sin x)' \frac{1}{\cos x} + \sin x \left(\frac{1}{\cos x} \right)'$$

が得られる。ここで $\cos x = u$ とおくと

$$\left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{d}{dx} \frac{1}{u} = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} \frac{1}{u} = (-\sin x) \frac{-1}{u^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

なので $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ となる。

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7) 逆三角関数 逆正弦関数 $y = \arcsin x$ は $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の逆関数として定義された。よって

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立する。 $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ より

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

を得る。

逆余弦関数 $y = \arccos x$ に対して,

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

が成立する。導関数は $\arcsin x$ のときと同じ様に計算すると

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。

逆正接関数 $\arctan x$ に対しては

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立する。 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ より

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

が分かる。

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

演習問題 5.21 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限值は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| (1) $y = x^3$ | (2) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ |
| (3) $y = \sqrt{x^2+1}$ | (4) $y = \cos 2x$ |
| (5) $y = 2^{x^2}$ | (6) $y = \log x$ |
| (7) $y = \sin(x^2)$ | (8) $y = \log_a x$ |
| (9) $y = \arctan(x^2)$ | (10) $y = \arcsin(1-x)$ |

演習問題 5.22 次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (1) $y = x^2 + 3x + 2$ | (2) $y = 3 \sin x + 2e^x$ |
| (3) $y = xe^x$ | (4) $y = \sin^{100} 2x$ |

- (5) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$ (6) $y = \arcsin(x^2 + 1)$
 (7) $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$ (8) $y = \sin(3x + 1)$
 (9) $y = e^x \sin x$ (10) $y = x \arctan x$

演習問題 5.23 次を示せ。

$$y = \log|x| \ (x \neq 0) \text{ とおくと } y' = \frac{1}{x}$$

最後に合成関数の微分公式の応用として対数微分法を説明する。

例 5.16 $y = x^x \ (x > 0)$ を微分せよ。

両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1$$

$$y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

例 5.17 $y = x^\alpha \ (x > 0, \alpha \text{ は任意の実数})$ とするとき

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

実際, $\log y = \alpha \log x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

が得られ, これから示される。

これよりたとえば

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \left\{ (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

等の計算ができる。このように両辺の対数をとって微分することを対数微分法といい, $\{f(x)\}^{g(x)}$ の形の関数の微分計算において有効である。

演習問題 5.24 対数微分法を用いて次の微分をもとめよ。(2) は対数微分法を用いなくてもできるが, 用いると少し計算が楽になる。

- (1) $x^{\sin x}$ (2) $\sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$