数学序論要綱 ♯15

6　1変数関数の不定積分

この章では不定積分について学ぶ。数学序論では基本的な積分のみ扱う。一般の有理関数の不定積分や少し複雑な置換積分などは解析学Iで，定積分，2変数関数の積分は解析学IIで扱う。

6.1　定義と諸性質

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

関数 $F(x)$ が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい，$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ と表す。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではない。しかし次の命題から定数の差しかない事が分かる。

命題 6.1 2つの関数 $F(x)$, $G(x)$ が $F'(x) = G'(x)$ を満たせばある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

例えば $\left(\dfrac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ なので

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となる。この C を**積分定数**と呼ぶが，この講義では，なければ混乱する場合を除き通常省略する。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し，そのことをいちいち断らないこととする。

演習問題 6.1　次の定理は平均値の定理と呼ばれる。平均値の定理の成立を前提として命題 6.1 を証明せよ。

関数 f が $[\,a, b\,]$ で連続であり，$(\,a, b\,)$ で微分可能であるとする。このときある実数 c で $a < c < b$ かつ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものが存在する。

命題 6.2 [**積分の線型性**]

(1) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

命題 6.3 [**いくつかの関数の不定積分**]

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} (a \neq -1)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ (4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ (6) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

これらの命題はすべて微分法の対応する公式を積分の言葉に直すと出てくる。ここでは命題 6.2 (1) と命題 6.3 (1) を示し残りは演習問題とする。$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$，$G(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$ とおくと，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ である。このとき $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ より

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

が得られる。

$a \neq -1$ のとき $\left(\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' = x^a$ なので

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$$

を得る。

微分法の公式と積分法の公式の両方を丸暗記して混乱する人もいるが，その様な人に対しては (丸暗記を推奨する訳ではないが，かりに暗記をするとしたら)「微分法の公式だけにして，積分法は微分法から導いたほうがよい」と言っておこう。

演習問題 6.2 命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

6.2 置換積分法と部分積分法

不定積分の計算は微分の計算に比べ一般に難しい。計算の方法として置換積分法と部分積分法の 2 つがある [(1)]。

[(1)] というか計算方法はこの 2 つしかない。和，実数倍を命題 6.2 でいくつかの積分に分解した後はこの 2 つを用いて知っている積分に帰着する以外に計算方法はない。

合成関数の微分法を積分に翻訳したのが置換積分法であり，積の微分法を積分に翻訳したのが部分積分法である。最初は置換積分法から。

定理 6.4 [**置換積分法**] $x = \varphi(t)$ とすると，

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

証明 $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ のとき $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である。合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d\varphi(t)}{dt}f(x)$$

なので

$$\int f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x)\,dx$$

を得る。∎

この置換積分の形を見ると，x に関する積分を t に関する積分に変換するとき，形式的には次の操作を行っていると考えられる。

$x = \varphi(t)$ を微分して $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ を求め，これを $dx = \varphi'(t)dt$ と変形して $\displaystyle\int f(x)\,dx$ の dx に代入する。

この方法は dx, dt を独立した項として扱うものである。このことは便法でなく正当化する議論ができる。ここではその説明はしないが，変数変換では便利なので使用することにする。勿論この方法を使用しなくても置換積分の計算はできる。

幾つかの例を見ておこう。

最初に変数が1次式になっている形の積分を考える。$I = \displaystyle\int \cos(2x+3)\,dx$ を考える。$t = 2x+3$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = 2$ なので，$dx = \dfrac{1}{2}dt$ である。よって

$$I = \int \cos t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin(2x+3)$$

次に置換積分の特徴的な形として $I = \displaystyle\int u' f(u)\,dx$ という形の積

分を見よう[2]。最初は $f(u)=\dfrac{1}{u}$ の場合，即ち $\displaystyle\int\frac{u'}{u}dx$ の積分を考える。この形は対数型と呼ばれる。

$I=\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\,dx$ を考える。$u=1+x^2$ とおくと，$\dfrac{du}{dx}=2x$ なので，$dx=\dfrac{1}{2x}du$，よって

$$I=\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int\frac{x}{u}\frac{1}{2x}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\log|u|=\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。u は自分で置いたものなので最終形は与えられた変数 (今の場合 x) で表しておく。

対数型 2 番目：$\displaystyle\int\tan x\,dx$ を考える。$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので $u=\cos x$ とおくと，$\dfrac{du}{dx}=-\sin x$ より $dx=-\dfrac{1}{\sin x}du$ である。よって

$$I=-\int\frac{\sin x}{u}\frac{1}{\sin x}\,du=-\int\frac{1}{u}\,du=-\log|u|=-\log|\cos x|$$

次に対数型でない例 $I=\displaystyle\int\cos x\sin^n x\,dx$ (n は自然数) を考える。$s=\sin x$ とおくと $\dfrac{ds}{dx}=\cos x$ なので

$$\begin{aligned}I&=\int\cos x\sin^n x\,dx=\int\cos x\,s^n\frac{1}{\cos x}\,ds\\&=\int s^n\,ds=\frac{1}{n+1}s^{n+1}=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\end{aligned}$$

定理 6.5 [**部分積分法**]

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

証明　定義より任意の微分可能な関数 $h(x)$ に対し

$$\int h'(x)\,dx=h(x)$$

が成立している。$\dfrac{d}{dx}(f(x)g(x))=\dfrac{d}{dx}f(x)g(x)+f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)$ の両辺を積分すると

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx$$

[2] 勿論積分は u を用いて表されているわけではない。自分で u を発見することが置換積分での計算のポイントになる

を得る。これを移項すると定理が得られる。 ▮

定理は移項すると

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

の形になる。実際に適用するときは，どちらを微分されたものと考えるかで 2 通り方法がある。慣れれば積分を見るとどちらを適用するか分かるようになるかもしれないが，最初はどちらかでやってみてダメなら逆の方法でやる。$\displaystyle\int xe^x\,dx$ を例に考える。最初は $xe^x = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' e^x$ と見て計算する。

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}\left(e^x\right)'\,dx \\ = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx\end{aligned}$$

計算は間違っていないが xe^x の積分を計算しようとしてもっと複雑な x^2e^x の積分を計算することになってしまった。そこで $xe^x = x\left(e^x\right)'$ と見て計算する。

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx \\ &= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x\end{aligned}$$

次の例は $x\log x = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' \log x$ と見る。一見多項式の次数が上がる様に見えるが $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を用いて計算ができる。

$$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\left(\log x\right)'\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

部分積分を 2 回実行する必要のある次の様な形の積分もある。

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\end{aligned}$$

$1 = (x)'$ と考える言わば退化した形で用いられる積分もある。

$$
\begin{aligned}
\int \log x \, dx &= \int (x)' \log x \, dx \\
&= x \log x - \int x \, (\log x)' \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \log x - \int dx = x \log x - x
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int 1 \, dx = \int dx$ と 1 の積分は 1 を省略することが多い。

演習問題 6.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x+5)^6$	(2) e^{-2x}	(3) $\sin \dfrac{x}{2}$	(4) $x(3x^2+1)^8$
(5) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$	(6) xe^{3x}	(7) $x^2 e^{3x}$	(8) $\tan x$
(9) $x \sin x$	(10) $x^2 \cos x$	(11) $x^3 \log x$	(12) $(\log x)^2$
(13) $\arctan x$	(14) $\arcsin x$	(15) $e^x \sin x$	(16) $e^x \cos x$

重要な注意：　不定積分において計算は一般に大変であるが，**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事**!!