数学序論問題解説 $\sharp 1$

演習問題 1.1　次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。
(1) $P_1 : 1 \geq 1$
(2) $P_2 : 2^{2016}$ は素数である。
(3) P_3 : 12345 は 3 で割り切れる。
(4) P_4 : 微分可能な関数は連続である。
(5) P_5 : 連続な関数は微分可能である。
(6) P_6 : 数学は難しい。
(7) $P_7 : n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

　真であるか偽であるかが確定しているものが命題であった。正しくても間違っていても，確定していれば命題である。
(1)　$1 \geq 1$ は真である事が確定しているので，P_1 は命題である。
(2)　素数とは「1 と自分自身以外に約数を持たない自然数」である (1 は素数ではないので正確には「約数を 2 個持つ自然数」が定義である)。2 は $2 \neq 1$ かつ $2 \neq 2^{2016}$ であり，2 は 2^{2016} を割りきる。2 は 2^{2016} の約数なので，2^{2016} の約数は少なくとも 3 個 (実際は 2017 個) ある。よって 2^{2016} は素数ではない。P_2 は偽であることが確定している。よって P_2 は命題である。
(3)　P_3 は正しい命題である。「$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ が 3 で割り切れるので」という判定法を知っている人もいるだろう。
(4)　高校時代数学 III で扱っただろうし，後で学ぶが，P_4 は正しい命題である。
(5)　$y = f(x) = |x|$ は連続だが，$x = 0$ で微分可能ではない。よって P_5 は間違った命題である。
(6)　多くの人には正しい命題と思われるかもしれないが，P_6 は命題でない。
(7)　$3^2 + 4^2 = 5^2$ なので P_7 は間違った命題である。似ているようだが「 自然数 $n \geq 3$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。」は 350 年以上未解決で 20 年ほど前に正しいことが分かった命題である。未解決のときは「フェルマー予想」または「フェルマーの最終定理」と呼ばれていた。解決以降は「フェルマー・ワイルスの定理」と呼ばれている。

演習問題 1.2　真理値表を用いて命題 1.1 を証明せよ。

(1)　真理表は

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

となる。P と $\neg(\neg P)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。
　これは演習問題直前の「真理値表の対応する欄の真理値が等しいならば同値である」という注意に基づいた解答である。定義に基づいた解答は次の様になる。

真理値表は

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \implies \neg(\neg P)$	$P \impliedby \neg(\neg P)$
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T

となる。

$P \implies \neg(\neg P)$ は常に正しい，恒真命題であり，$P \impliedby \neg(\neg P)$ も恒真命題なので 2 つは同値である。

(2)　真理値表は

P	$P \wedge P$
T	T
F	F

および

P	$P \vee P$
T	T
F	F

である。

P と $P \wedge P$ の対応する欄の真理値が同じなので前者の 2 つは同値である。また P と $P \vee P$ の対応する欄の真理値が同じなので後者の 2 つは同値である。

(3)

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

および

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

対応する欄の真理値は同じなので前者後者共に同値である。

(4)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F

$P \vee (Q \vee R)$ と $(P \vee Q) \vee R$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(5)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

$P \wedge (Q \wedge R)$ と $(P \wedge Q) \wedge R$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(6)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

および

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee (P \wedge Q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

対応する欄の真理値は同じなので前者後者共に同値である。

(7)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(8)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$P \vee (Q \wedge R)$ と $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(9)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(10)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \vee Q)$ と $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

(11)

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

となる。

$P \implies Q$ と $\neg P \vee Q$ の対応する欄の真理値は同じなので 2 つは同値である。

演習問題 1.3　真理値表を用いて命題 1.2 を証明せよ。

(1)

$\mathbb{T}$	$\neg\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
T	F	F

$\mathbb{F}$	$\neg\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
F	T	T

対応する欄の真理値が等しいので同値である。

(2)

P	$P \wedge \mathbb{T}$
T	T
F	F

P	$P \vee \mathbb{F}$
T	T
F	F

対応する欄の真理値が等しいので同値である。

(3)

P	$P \wedge \mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
T	F	F
F	F	F

P	$P \vee \mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
T	T	T
F	T	T

対応する欄の真理値が等しいので同値である。

(4)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\mathbb{F}$
T	F	F	F
F	T	F	F

対応する欄の真理値が等しいので同値である。

(5)

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$\mathbb{T}$
T	F	T	T
F	T	T	T

対応する欄の真理値が等しいので同値である。

演習問題 ***1.4**　次を真理表を使わずに証明せよ。ただし，(4)，(5) は命題がトートロジーであることを示せ。

(1) $\neg(P \implies Q) \equiv P \wedge \neg Q$

(2) $(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$　**対偶** $(contraposition)$

(3) $(P \implies (Q \implies R)) \equiv (Q \implies (P \implies R))$

(4) $((P \implies Q) \implies P) \implies P$

(5) $((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$

(1)

$$\neg(P \implies Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg Q$$

(2)

$$\neg Q \implies \neg P \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P \equiv Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee Q \equiv P \implies Q$$

(3)

$$\begin{aligned}(P \implies (Q \implies R)) &\equiv \neg P \vee (Q \implies R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg P) \vee R \equiv \neg Q \vee (\neg P \vee R) \equiv \neg Q \vee (P \implies R) \\ &\equiv (Q \implies (P \implies R))\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}((P \implies Q) \implies P) \implies P &\equiv \neg((P \implies Q) \implies P) \vee P \equiv \neg(\neg(P \implies Q) \vee P) \vee P \\ &\equiv (\neg\neg(P \implies Q) \wedge \neg P) \vee P \equiv ((P \implies Q) \wedge \neg P) \vee P \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P \equiv \neg P \vee P \equiv \mathbb{T}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}&((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R) \\ &\equiv \neg((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \vee (P \implies R) \\ &\equiv \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \\ &\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R) \\ &\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R) \\ &\equiv [(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R)] \vee (\neg P \vee R) \\ &\equiv [(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)] \vee (\neg P \vee R) \\ &\equiv [(P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)] \wedge [(P \vee \neg R) \vee (\neg P \vee R)] \wedge [(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)] \\ &\equiv \mathbb{T} \wedge \mathbb{T} \wedge \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}\end{aligned}$$

演習問題 1.5　次の命題 (?) 対偶命題をつくれ。
(1) 彼は怒られないと勉強しない。
(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

(1)　単純に対偶を作ると「勉強するなら怒られる」となる。勉強している時点と怒られた時点の時間の関係を考えると怒られた方が過去であることに注意して，時間の逆転も考慮に入れると,「彼が勉強していれば，その前に必ず怒られている」となる。
(2)　これも単純に対偶を作ると,「合格するなら，勉強する」となるが，時間の逆転に注意すると,「合格した人は勉強した人」となる。

演習問題 1.6　(天国への道) ある人が死んで，あの世への道を歩いてゆくと，二又に分かれた分岐点に出た。一方の道は天国に通じ，もう一方の道は地獄への道である，ということはわかっているが，どちらが天国への道なのかはわからない。その分岐点には一匹の悪魔がいて，yes or no で答えられる質問に 1 回だけ答えてくれる。しかし悪魔には，常に正直に答える正直悪魔と，常にウソを答えるウソつき悪魔の 2 種類がいて，そこにいるのがどちらなのかは，全くわからない。

さて，1 回だけの質問で，天国への道を知るには，いったいどのような質問をすればよいのだろうか？

(Hint: 命題 A を「右の道は天国への道である。」というものとし，命題 B を「あなたは正直な悪魔である。」としてみよう。これらの命題とその否定を，真理表を使って，うまく組み合わせる。)

まあパズルなので気楽に考えて下さい。質問「X」に対して回答が「Yes」なら T「No」なら F と書くことにする。命題 A および命題 B の真偽にしたがって次の真理表の「X」または「Y」の様な真理値をもつ「質問」が構成できれば解答になる。即ちこのような質問が構成できたとする。「X」が構成できたときはその質問をして,「Yes」なら右へ,「No」なら左へ行けばよい。「Y」が構成できたときはその質問をして,「Yes」なら左へ,「No」なら右へ行けばよい。まあもっとも問題は「天国への道を知る」ことにあるので，地獄に行きたい人は逆の道を選んでもよい。

A	B	「X」	「Y」
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	F	T
F	F	F	T

例えば質問 A 即ち「右の道は天国への道であるか」という質問をしたとき，また質問 B 即ち「あなたは正直な悪魔であるか」という質問をしたとき，真理表は次の様になる。

A	B	「A」	「B」
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T

最初に命題 C を「右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes である」とする。このとき真理表は次の様になる。

A	B	右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes である
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

つまり悪魔が「ウソつき悪魔」のときウソを 1 回ついているので真偽が入れ替わっている。この悪魔にもう 1 回ウソをつかせば元に戻ることになる。よって命題 D を「『右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes であるか』という質問に対する答えは Yes である」とす

る。このとき真理表は次のようになり求めているものが得られる。以上により，1 つの答えとして「『右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes であるか』という質問に対する答えは Yes であるか」という質問をすればよいことが分かる。

A	B	右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes である	『右の道が天国であるという質問に対する答えは Yes であるか』という質問に対する答えは Yes である
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	F