数学序論問題解説 $\sharp 2$

演習問題 1.7　次の命題の否定命題をつくれ。また元の命題の真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合であり，$\mathbb{C}$ は複素数全体からなる集合とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 \geq 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{C}\ \ x^2 \geq 0$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} \geq 0$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geq 0$

(5) $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \leq 0$

(6) $\exists x \in \mathbb{R}\ \ \left(x - 2x^2 > 0\ \wedge\ x < 0\right)$

(1)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^2 < 0$ 」である。

実数に対して正 $\times$ 正 $=$ 正，負 $\times$ 負 $=$ 正，$0 \times 0 = 0$ が成立するので，任意の実数 x に対し $x^2 \geq 0$ が成立する。よって 1.7 (1) は正しい命題である。

(2)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C}\ \ x^2 < 0$ 」である。複素数 i は $i^2 = -1 < 0$ なので否定命題は正しい命題である。よって 1.7 (2) は偽である。なお複素数は一般に大小の比較はできないことを注意しておく。元の命題を「$\forall x \in \mathbb{C}\quad x^2$は 0 と大小が比較可能で $x^2 \geq 0$」と考えると否定命題は「$\exists x \in \mathbb{C}\quad x^2$ は 0 と大小が比較可能でないかまたは $x^2 < 0$」となる。

(3)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} < 0$ 」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ なので 1.7 (3) は正しい命題である。

(4)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$ 」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{20}$ が成立する。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{20} < 0$ となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.7 (4) は偽である。

(5)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} > 0$ 」である。(4) の (反) 例は (5) の例にもなっているので，1.7 (5) は正しい。

(6)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\quad \left(x - 2x^2 \leq 0\ \vee\ x \geqq 0\right)$」である。$x - 2x^2 = x(1-2x) > 0 \iff 0 < x < \dfrac{1}{2}$ なので $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.7 (6) は偽である。

演習問題 1.8　a, b は与えられた実数とする。次の命題の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\quad a < x \implies b < x$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}\quad a > x \implies b > x$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\quad a \leq x \implies b < x$

(1)　命題「$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a < x \implies b < x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ a < x \wedge x \leq b$$

である。

否定命題 $\neg P$ が正しいとき $a < b$ が成立する。即ち「 $a < b$ 」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら，P_1 が真のとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a < x \leq b$ を満たす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

よって $\neg P$ と P_1 は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \quad \equiv \quad \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1 ($a < b$) の否定，即ち「 $a \geq b$ 」と同値であることが分かる。

(1) は $a \geq b$ のとき真，$a < b$ のとき偽である。

(2)　命題「$\forall x \in \mathbb{R}\ a > x \implies b > x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ a > x \land x \geq b$$

である。

「$a > b$」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら P_1 が正しいとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a > x \geq b$ をみたす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1 ($a > b$) の否定，即ち「 $b \geq a$ 」と同値であることが分かる。

(2) は $b \geq a$ のとき真，$a > b$ のとき偽である。

(3)　命題「$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a \leq x \implies b < x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ a \leq x \land x \leq b$$

である。

「 $a \leq b$ 」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら P_1 が正しいとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a \leq x \leq b$ をみたす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

よって $\neg P$ と P_1 は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \quad \equiv \quad \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1（$a \leq b$）の否定，即ち「$a > b$」と同値であることが分かる。

(3) は $a > b$ のとき真，$a \leq b$ のとき偽である。

演習問題 1.9　次の命題の否定命題をつくれ。また元の命題の真偽を確かめよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x < y$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x < y$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x < y$

(4) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x < y$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x^2 + y^2 \geq 0$

(6) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x^2 + y^2 = 0$

命題の真偽を調べるときは，元の命題の真偽を調べてもよいし，否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

(1)　否定命題は「$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x \geq y$」である。$x = 1$，$y = 0$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。

(2)　否定命題は「$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x \geq y$」である。$x = 0$，$y = 1$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。

(3)　否定命題は「$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x \geq y$」である。任意の実数 x に対し $y = x + 1$ とおく。このとき $x < y$ が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。

(4)　否定命題は「$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x \geq y$」である。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。

(5)　否定命題は「$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x^2 + y^2 < 0$」である。任意の実数 x に対し $x^2 \geq 0$ が成立する。同様に任意の実数 y に対し $y^2 \geq 0$ が成立する。よって $x^2 + y^2 \geq 0$ が成立するので元の命題は正しい。

(6)　否定命題は「$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x^2 + y^2 \neq 0$」である。$x = 0$，$y = 0$ を選ぶと $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ で元の命題が正しいことが分かる。

演習問題 1.10　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}$

要綱では解析の過程と証明の両方を述べたが，ここでは証明のみ述べる。解析は各自すること。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$a_1 = \dfrac{2y - x}{3}, a_2 = \dfrac{2x - y}{3}$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{2y - x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x - y}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(2) 背理法で示す。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。このとき $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

$$2 = 2a_1 + 4a_2 = \frac{2}{3}(3a_1 + 6a_2) = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

となり，$2 = 0$ となるが，これは矛盾。よって $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$a_1 = \dfrac{7x - 4y}{2}, a_2 = \dfrac{2y - 3x}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{7x - 4y}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2y - 3x}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(4) 背理法で示す。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

$$\begin{aligned} -9a_1 + 12a_2 &= 1 \\ 12a_1 - 16a_2 &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。このとき

$$4 = 4 \cdot 1 = 4(-9a_1 + 12a_2) = -3(12a_1 - 16a_2) = -3 \cdot 0 = 0$$

となり矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。