

数学序論問題解説 #3

演習問題 1.11 次において X は Y の, 1) 必要十分条件, 2) 必要条件ではあるが十分条件ではない, 3) 十分条件ではあるが必要条件ではない, 4) 必要条件でも十分条件でもない, のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

- (1) $X : x^2 = 1, Y : x = 1$
- (2) $X : xy > 0, Y : x > 0$ かつ $y > 0$
- (3) $X : xy > 0, Y : x > 0$ または $y > 0$
- (4) $X : xy = 0, Y : x = 0$ かつ $y = 0$
- (5) $X : xy = 0, Y : x = 0$ または $y = 0$
- (6) $X : x = 1$ でないかまたは $y = 1, Y : xy = 1$
- (7) $X : x = 0$ でなく, かつ $y = 0$ でない, $Y : xy = 0$ でない
- (8) $X : xy = 0$ かつ $y = x + 1, Y : x = 0$ かつ $y = 1$
- (9) $X : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, Y : x = -1 + \sqrt{2}$

- (1) $Y \implies X$ は正しい(このことの証明は不要であろう)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。
- (2) $Y \implies X$ は正しい(正の数どうしをかけたものは正)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。
- (3) $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。 $Y \implies X$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件でも十分条件でもない。
- (4) $Y \implies X$ は正しい(x, y のどちらか一方が 0 であれば積 $xy = 0$)。 $X \implies Y$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件である。
- (5) 積の性質から ($xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$), X は Y の必要十分条件である。
- (6) X の否定 $\neg X$ は「 $x = 1 \wedge y \neq 1$ 」である。 $\neg X$ が成立するとき積 xy は 1 にはならない。よって $\neg X \implies \neg Y$ が成立する。対偶を考えることにより $Y \implies X$ が成立する。 $x = 2, y = 2$ のとき X は正しく, Y は正しくない。よって $X \implies Y$ は成立しない。以上により X は必要条件である。
- (7) $\neg X$ は「 $x = 0$ または $y = 0$ 」であり, $\neg Y$ は「 $xy = 0$ 」なので, $\neg X$ は $\neg Y$ の必要十分条件である。よって X は Y の必要十分条件である。
- (8) $Y \implies X$ は正しい($x = 0, y = 1$ として xy および $x + 1$ を計算すれば分かる)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件であるが十分条件ではない。
- (9) $-1 + \sqrt{2} > 0$ かつ $(-1 + \sqrt{2})^2 + 2(-1 + \sqrt{2}) - 1 = 0$ なので $Y \implies X$ は正しい。 $x^2 + 2x - 1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数 x は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $X \implies Y$ は正しい。 X は必要十分条件である。

演習問題 1.12 次の連立方程式の解を実数の範囲で求めよ。

- (1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
- (2) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
- (3) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$
- (4) $\sin x (\cos y \sin(x + y) + \sin y \cos(x + y)) = 0$ かつ
 $\sin y (\cos x \sin(x + y) + \sin x \cos(x + y)) = 0$

(1) $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $x^2 + y^2 = 0$ である。 $x^2 + y^2 = 0$ である必要十分条件は $(x, y) = (0, 0)$ である。よって $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ であるが、これは $x = 0$ と同値である。

記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので、上のことを記号を用いて書いておく。

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) = 0 &\iff (x = 0) \vee (x^2 + y^2 = 0) \\ x^2 + y^2 = 0 &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

なので

$$x = 0 \vee (x^2 + y^2) = 0 \iff x = 0 \vee (x, y) = (0, 0) \iff x = 0$$

となる。

よって与えられた連立方程式は連立方程式

$$(x = 0) \wedge y(x^2 + y^2 - 1 = 0)$$

と同値である。 $x = 0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2 - 1) = 0$ となり、 $y = 0$ または $y = 1$ または $y = -1$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって求める解は $(x, y) = (0, 0)$ または $(x, y) = (0, 1)$ または $(x, y) = (0, -1)$ である。

(2) $x^3 - x + y = 0$ を 1 式、 $y^3 + x - y = 0$ を 2 式とする。1 式と 2 式を加えると $x^3 + y^3 = 0$ を得る。 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ なので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff (x + y = 0 \vee x^2 - xy + y^2 = 0)$$

が成立している。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}y = 0 \wedge y = 0\right) \iff (x = 0 \wedge y = 0)$$

となる。よって

$$(x + y = 0 \vee x^2 - xy + y^2 = 0) \iff (x + y = 0 \vee (x, y) = (0, 0)) \iff x + y = 0$$

が成立するので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$$

が分かる。この式を 3 式とすると

$$1 \text{ 式} \wedge 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式} \wedge 3 \text{ 式}$$

が成立するので、1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3 - 2x = 0$ が得られる。 $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ なので $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

(3) 指数関数は0になることはないので連立方程式は $y - 2x^2y = 0$ (1式) かつ $x - 2xy^2 = 0$ (2式) と考えることができる。

$$y - 2x^2y = y(1 - 2x^2) = 0 \iff y = 0 \text{ または } 1 - 2x^2 = 0$$

$$x - 2xy^2 = x(1 - 2y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ または } 1 - 2y^2 = 0$$

よって

- 1式かつ2式 \iff (1) $x = 0$ かつ $y = 0$, または
 (2) $x = 0$ かつ $1 - 2x^2 = 0$, または
 (3) $1 - 2y^2 = 0$ かつ $y = 0$, または
 (4) $1 - 2y^2 = 0$ かつ $1 - 2x^2 = 0$

が成立する。(1) のときは $(x, y) = (0, 0)$ になる。(2) のときは $x = 0$ を $1 - 2x^2 = 0$ を代入すると $1 = 0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y = 0$ を $1 - 2y^2 = 0$ を代入すると $1 = 0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 - 2y^2 = 0$ より $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。以上により

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。

(4) \sin, \cos は周期 2π の周期関数なので, $(x, y) = (a, b)$ が解のとき $(x + 2n\pi, y + 2m\pi)$ (m, n は整数) も解になる。よって $0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$ の範囲の解を求めればよい。三角関数の加法定理を用いると与式は

$$\sin x \sin(x + 2y) = 0 \tag{1}$$

$$\sin y \sin(2x + y) = 0 \tag{2}$$

となる。

$$(1) \iff \sin x = 0 \vee \sin(x + 2y) = 0$$

$$(2) \iff \sin y = 0 \vee \sin(2x + y) = 0$$

であり, また

$$\sin x = 0 \iff x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\sin y = 0 \iff y = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

である。

(A) $\sin x = 0$ のとき: $x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) なので (2) 式に代入すると

$$\sin y \sin(2x + y) = \sin y \sin(2n\pi + y) = \sin y \sin y = 0$$

となる。よって $\sin y = 0$ より $y = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) となる。 $0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi$ より $x = 0, \pi, y = 0, \pi$ を得る。このとき $(x, y) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ は連立方程式の解になっている。

(B) $\sin y = 0$ のとき: (A) と同様の計算を実行することにより, 解が得られる。得られた解は (A) と同じである。

(C) $\sin x \neq 0 \wedge \sin y \neq 0$ のとき : $x + 2y = m\pi, 2x + y = n\pi$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) と表すことができる。後の式の2倍からを前の式引くことにより

$$x = \frac{1}{3}(2n - m)\pi$$

となる。 m, n は整数で, $0 \leq x < 2\pi$ なので可能性は

$$x = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

であるが, $\sin x \neq 0$ より $x = 0, \pi$ は不適である。よって x の可能性は $\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ である。同じことを y について考えると

$$y = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

を得る。

$\sin(x + 2y) = 0, \sin(2x + y) = 0$ となるためには $x + 2y = m\pi, 2x + y = n\pi$ となる必要がある。これらの中でそうなるのは

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right), \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right), \\ \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$$

である。(A) の解と (C) の解をあわせたものがすべての解である。