

## 数学序論問題解説 #8

演習問題 3.5 次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。

- (1)  $1 + i\sqrt{3}$       (2)  $-2$       (3)  $i$       (4)  $2\sqrt{3} - 2i$       (5)  $1 - \sqrt{3}i$

(1)  $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$  なので

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

と書ける。 $2 \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right)$  と表してもよい。ここで  $\exp(x) = e^x$  という記法を用いた。

(2)  $|-2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$  なので

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi}$$

となる。

(3)  $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$  なので

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

(4)  $|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$  なので

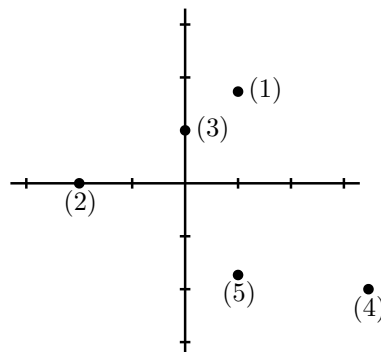
$$2\sqrt{3} - 2i = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \exp\left(-i \frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが  $\frac{11\pi}{6}$  としてもよい。

(5)  $|1 - \sqrt{3}i| = 2$  なので

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \exp\left(-i \frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが  $\frac{5\pi}{3}$  としてもよい。



演習問題 3.6 次の問に答えよ。

(1)  $e^{i\theta}$  は、原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。

(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(1)  $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$  なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。

(2)  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ,  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

となるので、

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 3.7 次の問に答えよ。

(1)  $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$  を示せ。

(2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta - i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2)  $n$  に関する数学的帰納法で証明する。 $n = 1$  のとき示すべき式は  $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$  なので成立している。 $n = k$  のとき成立を仮定する; 即ち  $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$  が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta} e^{i\theta} = e^{ik\theta + i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり  $n = k + 1$  の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 3.8 次の点を極形式で表し図示せよ。なお (3), (4) は点  $\alpha, \beta$  を用いて作図により与えよ。

(1)  $\alpha = 2 + 2i$

$$(2) \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

(3)  $\alpha\beta$

$$(4) \frac{\beta}{\alpha}$$

(1)  $|\alpha| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$  なので

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \exp \left( i \frac{\pi}{4} \right)$$

である。

(2)  $|\beta| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$  なので

$$\beta = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \exp \left( i \frac{\pi}{6} \right)$$

である。

(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{5\pi}{12}\right)$$

(4)

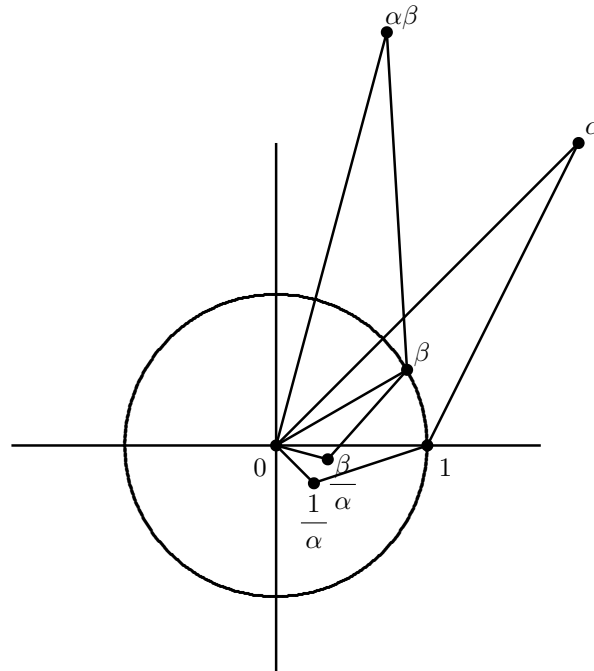
$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

図示に関してまとめて述べる。(1)は(2)は複素数が与えられているのでそれに基づいて点を定める。例えば $\alpha = 2 + 2i$ は $x$ 成分が2,  $y$ 成分が2の点即ち通常の座標で書くと(2, 2)に対応する点である。 $\beta$ に対応する点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

点と複素数を同一視して点 $\alpha$ 等と書く。(3)は三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $0\beta P$ を辺 $0\beta$ が辺 $01$ に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\alpha\beta$ に対応する。(4)は三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $0\beta P$ を辺 $0\beta$ が辺 $0\alpha$ に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\frac{\beta}{\alpha}$ に対応する。

(4)は次の様に作図してもよい。まず $\frac{1}{\alpha}$ を作図する。三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $01P$ を辺 $01$ が辺 $0\alpha$ に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\frac{1}{\alpha}$ に対応する。 $\beta$ と $\frac{1}{\alpha}$ から(3)と同様に作図する。

よって図示すると次図のようにになっている。



### 演習問題 3.9

- (1) 1の4乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (2) 1の3乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (3) 1の6乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。

(4) 1 の 5 乗根を求め、複素平面に図示せよ。

(1) 1 の 4 乗根は  $x^4 - 1 = 0$  の解なので

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

の解である。よって解は  $x = 1, -1, i, -i$  となる。図示すると最後の図のようになる。

(2) 1 の 3 乗根は  $x^3 = 1$  の解なので

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

より  $x = 1$  または  $x^2 + x + 1 = 0$  を満たす。 $x^2 + x + 1 = 0$  のとき

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので  $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  が求めるものである。 $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  とおくと  $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  になるので図の様になる。

(3) 1 の 6 乗根は  $x^6 = 1$  の解なので

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

より  $x = 1$  または  $x = -1$  または  $x^2 + x + 1 = 0$  または  $x^2 - x + 1 = 0$  を満たす。 $x^2 + x + 1 = 0$  のとき

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

であり、 $x^2 - x + 1 = 0$  のとき

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので  $1, -1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$  が求めるものである。 $\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$  とおくと、 $\lambda^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$ ,  $\lambda^3 = -1$ ,  $\lambda^4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$ ,  $\lambda^5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ , なので図の様になる。

(4) 5 乗根は

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{4\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{6\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{8\pi i}{5}\right), \exp\left(\frac{10\pi i}{5}\right) = 1$$

である。

5 乗根については「具体的に求めよ」とは書いていないので、以下のことは不要である。この場合「複 2 次式」と考えることにより求めることができるので書いておく。

1 の 5 乗根は  $x^5 = 1$  の解なので

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

より  $x = 1$  または  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  を満たす。 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  のとき両辺を  $x^2$  で割ると  $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$  となる。 $t = x + \frac{1}{x}$  とおくと  $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$  なので  $t$  は 2 次方程式

$$t^2 + t - 1 = 0$$

の解である。これを解くと  $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  が得られる。 $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。 $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

$$1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

が求める解である。

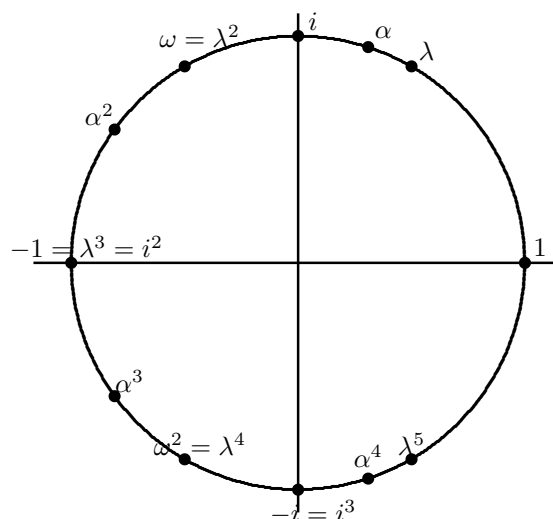
$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \text{ とおくと}$$

$$\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

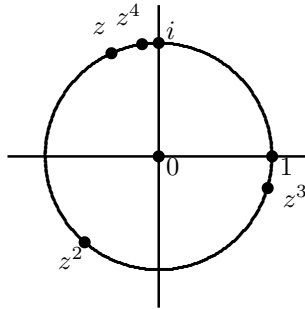
なので図のようになる。



演習問題 3.10  $z = e^{2i}$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $z, z^2, z^3, z^4$  を複素平面に図示せよ。  
 (2) 異なる自然数  $m, n$  に対し  $z^m \neq z^n$  を示せ。ただし  $\pi$  が有理数でないことは既知としてよい。

- (1)  $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} < 2 < 3.14 = \pi$  なので  $z$  は図の位置にある。 $z^2 = e^{4i}$  であり、 $\pi = 3.14 < 4 < \frac{3\pi}{2}$  なので  $z^2$  は図の位置にある。 $z^3 = e^{6i}$  であり、 $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$  なので  $z^3$  は図の位置にある。 $z^4 = e^{8i}$  であり、 $2\pi + \frac{\pi}{2} < 8 < 3\pi$  である。また  $8 < 2 + 2\pi$  なので  $z^4$  は図の位置にある。



- (2)  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  なので  $e^{ix} = 1$  となるのは  $x = 2k\pi$  ( $k$  は整数) のときであり、かつそのときに限る。

$z^m = z^n$  とすると  $z^{m-n} = 1$  即ち

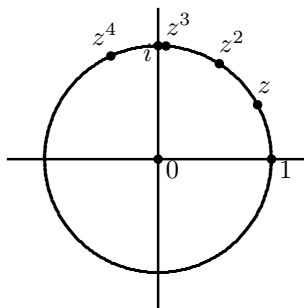
$$e^{i2(m-n)} = 1$$

となる。このときある整数  $k$  が存在して  $2(m-n) = 2k\pi$  となる。 $m$  と  $n$  が異なる自然数とすると  $k \neq 0$  である。このとき  $\pi = \frac{m-n}{k}$  より  $\pi$  が有理数となり矛盾。よって異なる自然数  $m, n$  に対しては  $z^m \neq z^n$  である。

演習問題 3.11

- (1)  $z = e^{i\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{1}{2}\right)$  とする。 $z, z^2, z^3, z^4$  を複素平面に図示せよ。  
 (2)  $n$  を自然数とし、 $z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\frac{1}{n}\right)$  とする。 $z$  は第 1 象限にある。すなわち  $z = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) とするとき  $a > 0, b > 0$  である。 $z^2, z^3$  も第 1 象限にあるとする。 $z^4, z^5, \dots$  と順に次々に計算して行ったとき、 $z^{29}$  までは第 1 象限にあり、 $z^{30}$  で初めて第 2 象限となった。 $n$  を求めよ。ただし  $\pi = 3.14$  とする。

- (1)



(2)  $n$  を自然数とし,  $z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\frac{1}{n}\right)$  とする。 $z$  は第 1 象限にある。すなわち  $z = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) とするとき  $a > 0, b > 0$  である。 $z^2, z^3$  も第 1 象限にあるとする。 $z^4, z^5, \dots$  と順に次々に計算して行ったとき,  $z^{29}$  までは第 1 象限にあり,  $z^{30}$  で初めて第 2 象限となった。 $n$  を求めよ。ただし  $\pi = 3.14$  とする。

$z^{29} = \exp\left(i\frac{29}{n}\right)$  が第 1 象限にあり,  $z^{30} = \exp\left(i\frac{30}{n}\right)$  が第 2 象限にあることより

$$\frac{29}{n} < \frac{\pi}{2} < \frac{30}{n}$$

これより

$$18.471 = \frac{58}{\pi} < n < \frac{60}{\pi} = 19.108$$

となり,  $n$  は自然数なので  $n = 19$  である。