

## 数学序論問題解説 #11

### 演習問題 4.13

- (1)  $a, b, c$  を正の実数とする。対数の定義のみを用いて  $a^b = c^{b \log_c a}$  を示せ。  
 (2)  $a, b, c$  を正の実数とする。対数の定義のみを用いて  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

- (1)  $Y = \log_c a$  とおくと  $a = c^Y$  が成立する。即ち  $a = c^{\log_c a}$  が成立する。両辺を  $b$  乗すると  $a^b = c^{b \log_c a}$  が得られる。  
 (2)  $X = \log_c a$  とおくと  $a = c^X$  が成立し,  $Y = \log_c b$  とおくと  $b = c^Y$  が成立する。

$$a^{\log_c b} = (c^{\log_c a})^{\log_c b} = c^{\log_c a \log_c b}$$

$$b^{\log_c a} = (c^{\log_c b})^{\log_c a} = c^{\log_c b \log_c a}$$

よって  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  が成立する。

### 演習問題 4.14

- (1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (2) 次の式を証明せよ。

1)  $\arccos \frac{4}{5} = \arcsin \frac{3}{5}$

2)  $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$

3)  $\arccos \frac{24}{25} + \arccos \frac{12}{13} = \arcsin \frac{204}{325}$

4)  $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

- (3) 次の式を簡単にせよ。

1)  $\arctan 2 + \arctan 3$

2)  $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}$

3)  $\arctan 3 + \arctan 4$

4)  $\arcsin \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4}$

(4) 方程式  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arctan x$  をみたす  $x$  を求めよ。

(5)  $-1 \leq x \leq 1$  の時,  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  を示せ。

(6)  $x > 0$  の時,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  を示せ。

(7)  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

逆三角関数の問題を考えるときには値の範囲のチェックが必要である。 $y$ の範囲が分からないときには、 $x = \sin y$  から  $y = \arcsin x$  は導かれない。

(1)  $x = \arcsin \frac{1}{2}$  とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  で  $\sin x = \frac{1}{2}$  となる  $x$  を求めると  $x = \frac{\pi}{6}$  である。よって  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$  となる。

$x = \arccos \frac{1}{2}$  とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

なので  $x = \frac{\pi}{3}$  , 即ち  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$  となる。

$x = \arctan 1$  とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $x = \frac{\pi}{4}$  , 即ち  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  となる。

$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$  とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $x = \frac{\pi}{4}$  , 即ち  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$  となる。

$x = \arctan \sqrt{3}$  とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $x = \frac{\pi}{3}$  , 即ち  $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$  となる。

$x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$  とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $x = \frac{\pi}{6}$  , 即ち  $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$  となる。

(2)

1)  $\arccos \frac{4}{5} = \alpha$  とおくと

$$\arccos \frac{4}{5} = \alpha \iff \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

である。ここで  $\cos \alpha \geq 0$  より  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  が成立する。

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

となるが  $\sin \alpha \geq 0$  より  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  となる。ここからいきなり  $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$  としないように !!  $\alpha$  の範囲のチェックを必ずすること。  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$  となる。よって

$$\arccos \frac{4}{5} = \alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

となる。

2)  $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$  とおくと

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。  $\beta = \arcsin \frac{5}{13}$  とおくと

$$\sin \beta = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。ここで  $\frac{3}{5}, \frac{5}{13}$  は共に正なので

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

が成立していることを注意しておく。このとき  $\cos \alpha, \cos \beta$  ともに正なので

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

が成立する。ここからいきなり  $\alpha + \beta = \arcsin \frac{56}{65}$  としないように !!  $\alpha + \beta$  の範囲のチェックを必ずすること。最初の注意より  $0 < \alpha + \beta < \pi$  が成立する。  $\alpha + \beta = \arcsin \frac{56}{65}$  を示すためには  $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$  が必要である。  $\cos(\alpha + \beta) \geq 0$  が成立していればそれが分かる。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \frac{5}{13} = \frac{33}{65} > 0$$

よって

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$$

が成立する。

範囲のチェックで、 $\alpha, \beta$  をもう少し詳しく見ることで  $\cos(\alpha + \beta)$  を計算しなくても求めることができる。範囲のチェックの部分は次のように行う。 $\sin(\alpha + \beta)$  の計算は前と同様。

$$0 < \sin \alpha = \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < \sin \beta = \frac{5}{13} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

よって  $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

3)  $\alpha = \arccos \frac{24}{25}$ ,  $\beta = \arccos \frac{12}{13}$  とおくと

$$\cos \alpha = \frac{24}{25} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi), \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

が成立している。 $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$  より  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}, \beta \leq \frac{\pi}{2}$  である。よって  $\sin \alpha \geq 0, \sin \beta \geq 0$  が成立している。

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より  $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \sin \beta = \frac{5}{13}$  である。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{7}{25} \frac{12}{13} + \frac{24}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{204}{325} \end{aligned}$$

ここからいきなり  $\alpha + \beta = \arcsin \frac{204}{325}$  としないように!!  $\alpha + \beta$  の範囲のチェックを必ずすること。  $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$  となるが

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{24}{25} \frac{12}{13} - \frac{7}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{253}{325} \geq 0 \end{aligned}$$

より  $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$  である。よって

$$\alpha + \beta = \arcsin \frac{204}{325}$$

である。

4)  $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$  とおくと  $\tan \alpha = \frac{1}{5}$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$  であるが、 $0 < \tan \alpha < 1$  より  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$  である。

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12} \quad \left(0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \quad (0 < 4\alpha < \pi)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}\right)$$

ここからいきなり  $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$  としないように!!  $4\alpha - \frac{\pi}{4}$  の範囲のチェックを必ずすること。

ここで  $0 < \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  より  $4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$  である。よって

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$$

となり式が得られる。

(3)

1)  $\arctan 2 = \alpha, \arctan 3 = \beta$  とおくと

$$\tan \alpha = 2 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan \beta = 3 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

である。 $\tan \alpha > 0, \tan \beta > 0$  より  $\alpha > 0, \beta > 0$  である。また  $\alpha + \beta < \pi$  である。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$

と  $0 < \alpha + \beta < \pi$  より  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$  となるので

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

2)  $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha, \arcsin \frac{12}{13} = \beta$  とおくと

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin \beta = \frac{12}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0$  より  $0 < \alpha, 0 < \beta$  である。また  $\alpha + \beta \leq \pi$  である。

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

と  $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$  より  $\cos \alpha = \frac{12}{13}, \cos \beta = \frac{5}{13}$  である。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \frac{12}{13} = 1$$

となるが  $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$  より  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  である。よって

$$\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

3)  $\alpha = \arctan 3, \beta = \arctan 4$  とおくと

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

であるが,

$$\tan \alpha = 3 > 0, \quad \tan \beta = 4 > 0$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

である。よって

$$0 < \alpha + \beta < \pi$$

である。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 + 4}{1 - 3 \cdot 4} = -\frac{7}{11} < 0$$

$\tan(\alpha + \beta) < 0$  より  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$  となる。よって

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \pi < 0 < \frac{\pi}{2}$$

と  $\tan(\alpha + \beta - \pi) = \tan(\alpha + \beta) = -\frac{7}{11}$  より

$$\arctan\left(-\frac{7}{11}\right) = \alpha + \beta - \pi$$

以上により

$$\arctan 3 + \arctan 4 = \alpha + \beta = \arctan\left(-\frac{7}{11}\right) + \pi$$

4)  $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}, \beta = \arcsin \frac{3}{4}$  とおくと

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

であるが,  $\sin \alpha = \frac{2}{3} > 0, \sin \beta = \frac{3}{4} > 0$  より

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

である。

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

より

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

である。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{35} - 6}{12}$$

$(\sqrt{35})^2 = 35 < 36 = 6^2$  より  $\cos(\alpha + \beta) < 0$  である。このことと  $0 < \alpha + \beta < \pi$  より  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$  が成立している。

$X = \pi - (\alpha + \beta)$  とおくと  $0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}$  であり、

$$\sin X = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

より

$$X = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

となる。よって

$$\arcsin \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4} = \alpha + \beta = \pi - X = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

(4)  $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$  とおくと

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

である。また  $y = \arctan x$  より

$$\tan y = x$$

なので、

$$\sin y = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。 $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$  に代入すると  $1 = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{5}$  より  $x^2 = 4$  を得る。

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

より  $x > 0$  なので  $x = 2$  が解である。

(5)  $\alpha = \arcsin x$  とおくと  $x = \sin \alpha$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$  であり、 $\beta = \arccos x$  とおくと  $x = \cos \beta$   $(0 \leq \beta \leq \pi)$  である。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\left(-\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -(-\cos \beta) = \cos \beta$$

$0 \leq \beta \leq \pi$  のとき  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$  であり、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta = x = \sin \alpha$$

なので  $\frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$  となり、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  となる。

(6)  $\alpha = \arctan x$  とおくと  $x = \tan \alpha$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$  である。 $x > 0$  より  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  となっている。 $\beta = \arctan \frac{1}{x}$  とおくと  $\frac{1}{x} = \tan \beta$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$  である。 $\frac{1}{x} > 0$  より  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  となっている。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\left(-\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \beta$$

これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\tan \beta} = x = \tan \alpha$$

が成立する。 $\alpha, \beta$  ともに  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  なので  $0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$  となり,  $\frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$  が成立する。

(7)  $\alpha = \arctan x$  とおくと  $x = \tan \alpha$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$  であり,  $\beta = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  とおくと  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin \beta$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

であるが,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  より  $\cos \alpha > 0$  なので  $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos \alpha}$  となる。

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos \alpha \tan \alpha = \sin \alpha$$

であり,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\alpha = \beta$  となる。