数学序論問題解説 $\sharp 12$

演習問題 *5.1　定理 5.2 を証明せよ。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の数学的にきちんとした定義は

$$\forall \varepsilon (>0) \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

である。

(1)　$k = 0$ のとき数列は $ka_n = 0$ であり，示すべき式は $|ka_n - k\alpha| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。

ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対してもある N が存在する。即ち $N \in \mathbb{N}$ で

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

を満たすものが存在する。このとき

$$n > N \implies |ka_n - k\alpha| = |k(a_n - \alpha)| = |k| \cdot |a_n - \alpha| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

が成立するので。$\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ が成立する。

(2)　ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{2}$ に対してもある N_1 が存在する。即ち $N_1 \in \mathbb{N}$ で

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。また b_n に対しても同様なので，$N_2 \in \mathbb{N}$ で

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。このとき $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$n > N$ となる任意の実数に対し $n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成立するので，

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。途中で三角不等式 $(|x + y| \leq |x| + |y|)$ を使用した。

$a_n - b_n$ の場合は $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$ と考え，(1) とすでに証明した和の極限を使用すると証明できる。

(3)　(3) を示すために最初に，収束する数列は有界であること，即ち a_n が収束するとき，

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq M$$

が成立することを示す。任意の ε に対し N が存在するので，特に 1 に対しある自然数 N が存在し $n > N$ に対し $|a_n - \alpha| < 1$ が成立する。このとき $-1 < a_n - \alpha < 1$ が成立するので，

$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ が成立する。このとき $M = \max\{\,|a_1|.|a_2|, \dots, |a_N|, |\alpha+1|, |\alpha-1|\,\}$ とおく。任意の自然数 n に対し，$n \leq N_1$ のときは $|a_n| \leq M$ が成立する。$n > N$ のときは

$$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$$

が成立するので，いずれの場合も $|a_n| \leq M$ が成立し，有界であることが示された。a_n は α に収束するので，上に述べた性質をもつ M が存在する。

最初に $\beta = 0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。b_n は 0 に収束するのである自然数 N が存在して，任意の n に対し

$$n > N \implies |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

が成立する。このとき

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

となるので，この場合は証明された。よって $\beta \neq 0$ とする。

ε を任意の正数とする。b_n は β に収束するので，$\dfrac{\varepsilon}{2M}$ に対しある自然数 N_2 が存在して

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。また $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ に対し自然数 N_1 が存在して

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

が成立する。$N = \max\{\,N_1, N_2\,\}$ とおくと，$n > N$ のとき

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \alpha\beta| &= |(a_n b_n - a_n\beta) + (a_n\beta - \alpha\beta)| \\
&\leq |a_n| \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\
&\leq M \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\beta|}|\beta| = \varepsilon
\end{aligned}$$

となるので証明された。

(4)　$\beta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

を示せば，(3) の結果とあわせれば (4) が証明される。よってこの命題を証明する。ε として $\dfrac{|\beta|}{2}$ をとると，ある自然数 N_1 が存在して，$n > N_1$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成立する。このとき $-\dfrac{|\beta|}{2} < b_n - \beta < \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立するので，$\beta - \dfrac{|\beta|}{2} < b_n < \beta + \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。このことから $n > N_1$ のとき $|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。また b_n は β に収束するので，$\dfrac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$ に対し自然数 N_2 が存在して $n > N_2$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$n > N$ のとき

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_n}{\beta b_n}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |b_n|} < \frac{2|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta| \cdot |\beta|}\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

となる。

演習問題 5.2　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+n+1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6+n^4+1}}{n^2+5}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1}$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+3n+1}}{1+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{1+0+0}}{1+0} = 1$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6+n^4+1}}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\sqrt[3]{n^6+n^4+1}}{1+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}}}{1+\frac{5}{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{1+0+0}}{1+0} = 1$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}2^n}{1-\frac{1}{3^n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^n}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

演習問題 ***5.3**　定理 5.4 を証明せよ。

ε を任意の正数とする。b_n は α に収束するので，極限の定義より，ある自然数 N_1 が存在して

$$n > N_1 \implies |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立している。このとき $\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$ が成立している。同様に c_n も α に収束するので，ある自然数 N_2 が存在して

$$n > N_2 \implies |c_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立している。このとき $\alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$ が成立している。

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，$b_n \leq a_n \leq c_n$ が成立しているので，$n > N$ のとき，

$$\alpha - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

が成立する。よって $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が示され証明が完了する。

演習問題 5.4　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n}$ (k は自然数)

ヒント: 2 項定理 $(1+h)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i h^i$ を用いて，$2^n, 3^n$ より小さい n の多項式を見つける。

(1)

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \cdot 1^i \geq \sum_{i=0}^{2} {}_nC_i \cdot 1^i \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 1^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

より

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{n(n-1)}$$

が成立する。3 辺を n 倍すると

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ とはさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ となる。

(2)

$$\begin{aligned} 3^n = (1+2)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \cdot 2^i \geq \sum_{i=0}^{3} {}_nC_i \cdot 2^i \\ &= 1 + n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} 2^3 \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} 2^3 = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} \end{aligned}$$

より

$$0 < \frac{n^2}{3^n} < \frac{3n^2}{4n(n-1)(n-2)}$$

となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n(n-1)(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)} = 0$ とはさみうちの定理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ となる。

(3)

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \cdot 1^i &\geq \sum_{i=0}^{4} {}_nC_i \cdot 1^i \\
&= {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 1^2 + {}_nC_3 \cdot 1^3 + {}_nC_4 \cdot 1^4 \\
&> {}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2}
\end{aligned}$$

より

$$0 < \frac{n^3}{2^n} < \frac{24n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{24n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{24\frac{1}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)} = 0$ とはさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ となる。

(4)　$n \to \infty$ より $n \geq k+1$ としてよい。このとき

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \cdot 1^i &\geq \sum_{i=0}^{k+1} {}_nC_i \cdot 1^i > {}_nC_{k+1} \cdot 1^{k+1} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

より

$$0 < \frac{n^k}{2^n} < \frac{(k+1)!n^k}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)!n^k}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)} = 0$$

とはさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ となる。

演習問題 5.5　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)$

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=0\end{aligned}$$

(2)

$$\left(n^2-2n\right) = (n-1)^2-1$$

なので収束せず $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right)=\infty$ となる。

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\left(\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[4]{(n+1)^3}+\sqrt[4]{(n+1)^2n}+\sqrt[4]{(n+1)n^2}+\sqrt[4]{n^3}\right)}{\sqrt[4]{(n+1)^3}+\sqrt[4]{(n+1)^2n}+\sqrt[3]{(n+1)n^2}+\sqrt[4]{n^3}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}\left(\left(\sqrt[4]{n+1}\right)^4-\left(\sqrt[4]{n}\right)^4\right)}{\sqrt[4]{(n+1)^3}+\sqrt[4]{(n+1)^2n}+\sqrt[4]{(n+1)n^2}+\sqrt[4]{n^3}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

演習問題 5.6　$a>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=a$,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

で定義するとき次の問に答えよ。ただし「下に有界 [1] な単調減少数列は収束する」という定理を用いてよい。

(1) 任意の自然数 n に対して $a_n>0$ であることを証明せよ。
これにより $a_n\neq 0$ なので帰納的に数列 a_n が定義されることが分かる。

(2) $a_n\geq 1$ となることを示せ。

(3) a_n が単調減少数列であることを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

[1] 数列 a_n が下に有界とはある実数 M が存在して任意の自然数 n に対し $M\leq a_n$ が成立することをいう。

(1)　帰納法により証明する。$n=1$ のときは $a_1=a>1>0$ なので成立する。$n=k$ のとき成立を仮定する。$a_k>0$ なので $\dfrac{1}{a_k}>0$ である。よって

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)>0$$

である。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $a_n>0$ が成立する。
(2)　$n=1$ のとき $a_1=a\geq 1$ である。$n\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n-1&=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)-1=\frac{a_{n-1}^2+1-2a_{n-1}}{2a_{n-1}}\\&=\frac{(a_{n-1}-1)^2}{2a_{n-1}}\end{aligned}$$

となる。$a_{n-1}>0$,（$a_{n-1}-1)^2\geq 0$ より $a_n-1\geq 0$ となり $a_n\geq 1$ が示される。
(3)

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)\\&=\frac{a_n^2-1}{2a_n}\end{aligned}$$

であるが $a_n\geq 1$ より $a_n^2-1\geq$ となる。$a_n>0$ より $a_n-a_{n+1}\geq 0$ となり。$a_{n+1}\leq a_n$ となる。
(4)　数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列なので収束する。よって $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ である。$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ において $n\to\infty$ とすると

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$

を得る。これより $\alpha^2=1$ となるが，$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\geq 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

である。

演習問題 *5.7　　「上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する」という定理は知られているものとする。次の順で数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示せ。
(1) 任意の自然数 n に対し $a_n\leq 3$ であることを示せ。
(2) a_n が単調増加，即ち任意の自然数 n に対し $a_n\leq a_{n+1}$ が成立することを示せ。

2 項係数 ${}_nC_k$ は $\dbinom{n}{k}$ とも書かれる。ここでは後者の記法を採用している。
(1)

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

が成立している。ここで $k! \geq 2^{k-1}$ より

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k|(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!}n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

が成立している。$k \geq 2$ の項を置き換えると

$$\begin{aligned}a_n &\leq 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &< 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 3\end{aligned}$$

となり (1) が示される。
(2)　a_n を 2 項定理で展開すると (1) より，

$$b_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

とおくとき，

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0+b_1+\cdots+b_k+\cdots+b_n$$

となっている。同様に a_{n+1} を 2 項定理で展開すると，

$$c_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

とおくとき，

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} c_k = c_0+c_1+\cdots+c_k+\cdots+c_{n+1}$$

となっている。$k = 0, 1, \ldots, n$ に対し $b_k \leq c_k$ が成立しており，$c_{n+1} > 0$ なので

$$a_n < a_{n+1}$$

となる。

演習問題 5.8　電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$, $a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$, $a_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

この問題の解説は省略する。各自計算してみて下さい。1 つだけ注意を。関数電卓等で計算するとき厳密な議論をするのであれば，関数電卓自身の誤差には注意する必要がある。マスマ

ティカやメイプルなどの数式処理ソフトを使うと誤差なしに計算が実行できる。講義関連の main page に free な数式処理ソフト Maxima を紹介してあるので，Maxima でも同様に計算できる。プログラム言語のライブラリ等を用いても同様のことはできる。また自分自身でそのようなプログラムを書くことも可能である。興味のあるものは各自試みることを期待します。

演習問題 5.9　次を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\ &= e\cdot 1 = e\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^2\end{aligned}$$

演習問題 *5.10　定理 5.10 を証明せよ。

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = a$ の定義は

$$\forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}\ \exists\delta(>0)\in\mathbb{R}\ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\ \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

が成立することである。

(1)　$k=0$ の場合は $kf(x)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k\neq 0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta>0$ が存在して $0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(x)-kA| = |k(f(x)-A)| = |k|\cdot|f(x)-A| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。

(2)　$\varepsilon>0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_1\ \Longrightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_2\ \Longrightarrow |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\,\delta_1, \delta_2\,\}$ とおく。$0 < |x-a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(A+B)| &= |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \\ &\leq |f(x)-A| + |g(x)-B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる。

(3)　1 に対しある正数 δ_0 が存在し，任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_0 \implies |f(x)-A| < 1$$

が成立している。このとき $M = \max\{\,|A+1|, |A-1|\,\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ が成立する。

最初に $B = 0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し $0 < |x-a| < \delta_1 \implies |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ が成立する。$\delta = \min\{\,\delta_0, \delta_1\,\}$ とおくと，任意の x に対し $0 < |x-a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B \neq 0$ とする。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。$\delta = \min\{\,\delta_0, \delta_1, \delta_1\,\}$ とおく。$0 < |x-a| < \delta$ となる x に対し

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &= |f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB| \\ &\leq |f(x)g(x)-f(x)B| + |f(x)B-AB| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x)-B| + |f(x)-A| \cdot |B| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|}|B| = \varepsilon\end{aligned}$$

となり，この場合も成立する。

(4)　数列のときと同様に $B \neq 0$ のとき

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

を示せば，(3) と組み合わせて (4) が証明される。

ε として $\dfrac{|B|}{2}$ をとると，正数 δ_1 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_1$ のとき，

$$|g(x)-B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(x)| > \dfrac{|B|}{2}$ が成立する。

任意の ε に対して，$g(x)$ は B に収束するので，ある正数 δ_2 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_2$ となる任意の x に対し

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$ となる任意の x に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{g(x)B}\right| &= \frac{|B-g(x)|}{|g(x)|\cdot|B|} \\ &< \frac{2|B-g(x)|}{|B|^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 *5.11　定理 5.11 を証明せよ。

任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |g(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと x が $0 < |x-a| < \delta$ を満たすとき

$$A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

が成立するので $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

演習問題 5.12

(1) 図 5.11 を参考にして $x > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(2) $x = -t$ とおくことにより $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(1)，(2) より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が示される。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ を示せ。

(6) $x = \log_e(1+u)$ とおくことにより $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ を示せ。

(1)　$x > 0$ とする。図 5.1 より

$$\triangle OPA \text{ の面積} < \text{扇形 } OPA \text{ の面積} < \triangle OTA \text{ の面積}$$

である。それぞれの面積を計算すると

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

これより

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to +0$ のとき $\cos x \to 1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成立する。

(2)　$x = -t$ とおくと $x < 0$ のとき $t > 0$ であり，$x \to -0$ とするとき $t \to +0$ となる。また $\sin(-t) = -\sin t$ なので

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}$$

となるので (1) とあわせて $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成立する。

(3)　$n \leq t < n+1$ となる自然数 n をとる，$1 + \dfrac{1}{n+1} < 1 + \dfrac{1}{t} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$ より

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e \qquad (n \to \infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \to e \qquad (n \to \infty)$$

だから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

(4)　$u = -t$ とおくと $t \to -\infty$ のとき $u \to +\infty$ となる。

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u} &= \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^u \\ &= \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1 + \frac{1}{u-1}\right) \to e \qquad (u \to \infty)\end{aligned}$$

なので $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ が成立する。

(5)　$u = \dfrac{1}{t}$ とおくと，$\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t = (1+u)^{\frac{1}{u}}$ となる。$t \to \infty$ のとき $u \to +0$ なので

$$\lim_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

が成立する。また $t \to -\infty$ のとき $u \to -0$ なので

$$\lim_{u\to-0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

が成立する。以上により

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

が得られる。

(6)　$x=\log(1+u)$ とおくと，$1+u=e^x$ より，$u=e^x-1$ となる。$u\to 0$ のとき $x\to 0$ なので

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\log(1+u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\log(1+u)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

演習問題 5.13　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の成立を仮定して次を示せ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1} \\ &= -1\cdot\frac{0}{2}=0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$