数学序論問題解説 $\sharp 13$

演習問題 5.14　$x=a$ で微分可能な関数は $x=a$ において連続であることを証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとすると，

$$\varepsilon(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$$

とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。このとき

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h$$

なので $x=a+h$ とおくと

$$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{h\to 0}f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h\}=f(a)$$

となるので $f(x)$ は $x=a$ で連続である。

演習問題 5.15　定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^3$
(3) $f(x)=x^2+x+1$　　(4) $f(x)=a$
(5) $f(x)=x^4$　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{x}$
(7) $f(x)=\sqrt{x}$　　(8) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{3x^2+3xh+h^2\right\}=3x^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{2x+h+1\right\}=2x+1\end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(5)

$$\begin{aligned}
(x^4)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\right\} \\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}$$

演習問題 ***5.16**　上の 定理 5.14 の証明のどこが不十分か指摘し，定理の証明を完成させよ。

定理の証明では $f(a+h)-f(a)$ で割り算をしているが，$f(a+h)-f(a)=0$ になる場合は 0 での割り算になってしまう。

証明を完成させる方法としては，$f(a+h)-f(a)$ が 0 になる場合とならない場合に分ける方法もあるがここでは一括して証明することを考える。

そのために次が成立することを注意しておく：「ある $q(x)$ と $\varepsilon(x)$ に対し

$$f(x+h)-f(x)=q(x)h+\varepsilon(h)h$$

が成立するとき，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立すれば $f(x)$ は微分可能であり，$f'(x)=q(x)$ が成立する。逆に $f(x)$ が微分可能のとき $\varepsilon(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ とおくと，

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\varepsilon(h)h$$

であり，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立する。」

$y=f(x), z=g(y)$ は微分可能なので

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= f'(x)h+\varepsilon_1(h)h \\ g(y+k)-g(y) &= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k \end{aligned}$$

としたとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$, $\lim_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0$ が成立している。$f(x+h)-f(x)=k$ とおくと $\lim_{h\to 0}k=0$ である。

$$\begin{aligned} g\circ f(x+h)-g\circ f(x) &= g(f(x+h))-g(f(x)) \\ &= g(f(x)+k)-g(f(x)) \\ &= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k \\ &= g'(y)\bigl(f(x+h)-f(x)\bigr)+\varepsilon_2(k)\bigl(f(x+h)-f(x)\bigr) \\ &= g'(y)\bigl(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\bigr)+\varepsilon_2(k)\bigl(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\bigr) \\ &= g'(y)f'(x)h+\Bigl(g'(y)\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)f'(x)+\varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)\Bigr)h \end{aligned}$$

$\varepsilon(h)=g'(y)\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)f'(x)+\varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$ とおくと

$$g\circ f(x+h)-g\circ f(x)=g'(y)f'(x)h+\varepsilon(h)h$$

となり，$h\to 0$ のとき $\lim_{h\to 0}k=0$, $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$, $\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(k)=0$ となるので

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

となる。最初の注意より $g\circ f(x)$ は微分可能で，導関数は $g'(y)f'(x)$ となる。よって

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

演習問題 5.17　定理 5.14 の成立を仮定して定理 5.15 を証明せよ。

定理の条件から，すでに示してあるように終域を適当に定めれば f は全単射であることが分かる。よって f の逆写像 f^{-1} が存在する。

f と f^{-1} を合成した関数は恒等写像である。即ち $f^{-1}\circ f(x)=x$ となる。$\dfrac{dx}{dx}=1$ なので，定理 5.14 を適用すると，

$$1=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

を得る。

演習問題 5.18　任意の自然数 n に対して $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n=1$ のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$$

よって $n=1$ のとき成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k\cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\ &= kx^{k-1}x + x^k\cdot 1 = kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^{k+1-1}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての n で成立する。

演習問題 5.19　演習問題 5.18 は数学的帰納法で求めたが，使わない方法もある。2 項定理 $\left((x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k}h^k\right)$ を用いて $(x^n)' = nx^{n-1}$ を数学的帰納法を用いず証明せよ。

$\Delta = \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$ とおくと

$$\Delta = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k}h^k - x^n}{h} = \frac{x^n + {}_nC_1 x^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k x^{n-k}h^k - x^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k x^{n-k}h^{k-1}$$

よって

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\Delta = nx^{n-1}$$

演習問題 5.20　次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$　　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(1)

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = (x-1)'\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x-1)\left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+1} + (x-1)\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

(2)　(1) と同様に解いてもよいし，$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{x^2-1+2}{x^2-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$ と変形して

$$y' = \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

演習問題 5.21　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

(1) $y=x^3$

(2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y=\sqrt{x^2+1}$

(4) $y=\cos 2x$

(5) $y=2^{x^2}$

(6) $y=\log x$

(7) $y=\sin(x^2)$

(8) $y=\log_a x$

(9) $y=\arctan(x^2)$

(10) $y=\arcsin(1-x)$

(1)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right)-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{(x+h+1)(x^2+1)-(x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(-x^2-2x+1-xh-h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x+1-xh-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\left(\cos 2x\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\cos 2x\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\frac{\sin 2h}{h}\right\}\\ &= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\frac{\cos 2h-1}{h}=\frac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}\\ &= -\lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\ &= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\ &= -2\cdot 1\cdot 0=0\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}=2\cdot 1=2$$

なので

$$\left(\cos 2x\right)'=-2\sin 2x$$

となる。

(5)　$2=e^k$ とおくと $\log 2=\log e^k=k$ である。

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2^{(x+h)^2}-2^{x^2}}{h}=\frac{\left(e^k\right)^{(x+h)^2}-\left(e^k\right)^{x^2}}{h}=\frac{e^{kx^2+2kxh+kh^2}-e^{kx^2}}{h}\\ &= \frac{e^{kx^2}\left(e^{kh(2x+h)}-1\right)}{h}=\frac{e^{kx^2}\left(e^{kh(2x+h)}-1\right)}{kh(2x+h)}k(2x+h)\end{aligned}$$

ここで $H=kh(2x+h)$ とおくと，$h\to 0$ のとき $H\to 0$ であり,

$$\Delta=\frac{e^H-1}{H}e^{kx^2}k(2x+h)$$

である。よって

$$\begin{aligned}\left(2^{x^2}\right)' &= \lim_{h\to 0}\Delta=\lim_{h\to 0}\frac{e^H-1}{H}e^{kx^2}k(2x+h)=e^{kx^2}k(2x)\\ &= 2x\log 2\left(e^k\right)^{x^2}=2x\log 2\cdot 2^{x^2}\end{aligned}$$

(6)

$$\left(\log x\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

であるが，ここで $k=\log(x+h)-\log x$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる。

$$\log(x+h)-\log x=\log\frac{x+h}{x}$$

なので $\log\dfrac{x+h}{x}=k$ より $e^k=\dfrac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h=x(e^k-1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\bigl(\log x\bigr)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

(7)　$f(x)=\sin(x^2)$ とする。$u=2xh+h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{\sin(x+h)^2-\sin(x^2)}{h}=\frac{\sin(x^2+2hx+h^2)-\sin(x^2)}{h}\\ &=\frac{\sin(x^2+u)-\sin(x^2)}{h}=\frac{\sin(x^2+u)-\sin(x^2)}{u}\frac{u}{h}\end{aligned}$$

$h\to 0$ のとき $u\to 0$ であり

$$\lim_{h\to 0}\frac{u}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\frac{\sin(x^2+u)-\sin(x^2)}{u}&=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(x^2)\cos u+\cos(x^2)\sin u-\sin(x^2)}{u}\\ &=\sin(x^2)\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-1}{u}+\cos(x^2)\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

ここで (4) で示した $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-1}{u}=0$ を用いると

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos(x^2)\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\lim_{h\to 0}\frac{u}{h}=2x\cos(x^2)$$

(8)　$f(x)=\log_a x$ とする。$y=\log_a x$ より $x=a^y$ である。$k=\log_a(x+h)-\log_a x$ とおくと

$$x+h=a^{\log_a(x+h)}=a^{\log_a x+k}=a^{\log_a x}a^k=xa^k$$

より

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{h}=\frac{k}{xa^k-x}=\frac{1}{x}\frac{k}{a^k-1}$$

$b=\log a$ とおくと $a=e^b$ より

$$\lim_{k\to 0}\frac{k}{a^k-1}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{(e^b)^k-1}=\lim_{k\to 0}\frac{bk}{e^{bk}-1}\frac{1}{b}=\frac{1}{b}=\frac{1}{\log a}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x\log a}$$

(9)　$f(x)=\arctan(x^2)$ とする。$u=2xh+h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{\arctan(x+h)^2-\arctan(x^2)}{h}=\frac{\arctan(x^2+2hx+h^2)-\arctan(x^2)}{h}\\ &=\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{h}=\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{u}\frac{u}{h}\end{aligned}$$

$y=\arctan(x^2)$，$k=\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)$ とおくと $x^2=\tan y$，$x^2+u=\tan(y+k)$ である。

$$\frac{\arctan(x^2+u)-\arctan(x^2)}{u}=\frac{y+k-y}{u}=\frac{k}{x^2+u-x^2}=\frac{k}{\tan(y+k)-\tan y}$$

$h\to 0$ のとき $k\to 0$ であり，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{u}{h}=2x$ である。

$$\lim_{k\to 0}\frac{\tan(y+k)-\tan y}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)}-\frac{\sin y}{\cos y}\right)=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\frac{\sin(y+k)\cos y-\sin y\cos(y+k)}{\cos(y+k)\cos y}$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\frac{\sin(y+k-y)}{\cos(y+k)\cos y}=\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k}\frac{1}{\cos(y+k)\cos y}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^4$$

よって

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2x}{1+x^4}$$

(10) $\arcsin(1-x)=y$ とおくと $1-x=\sin y$ となり，$\arcsin(1-(x+h))=y+k$ とおくと $1-(x+h)=\sin(y+k)$ となる。またこのとき $h=\sin y-\sin(y+k)$ となる。

$$\Delta=\frac{\arcsin(1-(x+h))-\arcsin(1-x)}{h}=\frac{k}{\sin y-\sin(y+k)}$$
$$=\frac{k}{-2\cos\left(\dfrac{y+k+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{y+k-y}{2}\right)}=\frac{k}{-2\cos\left(\dfrac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\dfrac{k}{2}\right)}$$

$h\to 0$ のとき $k\to 0$ なので

$$(\arcsin(1-x))'=\lim_{h\to 0}\Delta=\lim_{h\to 0}\frac{k}{-2\cos\left(\dfrac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\dfrac{k}{2}\right)}$$
$$=-\lim\frac{1}{\cos\left(\dfrac{2y+k}{2}\right)}\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{k}{2}}{\sin\left(\dfrac{k}{2}\right)}$$
$$=-\frac{1}{\cos y}$$

$\cos^2 y+\sin^2 y=1$ より

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}$$

よって

$$(\arcsin(1-x))'=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

演習問題 5.22　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $y=x^2+3x+2$

(2) $y=3\sin x+2e^x$

(3) $y=xe^x$

(4) $y=\sin^{100}2x$

(5) $y=x^3\log(2x^3+x)$

(6) $y=\arcsin(x^2+1)$

(7) $y=(x^2+2)(x^2+3)$ (8) $y=\sin(3x+1)$

(9) $y=e^x\sin x$ (10) $y=x\arctan x$

(1)

$$\big(x^2+3x+2\big)' \quad = \quad 2x+3$$

(2)

$$\big(3\sin x+2e^x\big)' \quad = \quad 3\cos x+2e^x$$

(3)

$$\big(xe^x\big)' \quad = \quad e^x+xe^x$$

(4)

$$\big(\sin^{100}2x\big)' \quad = \quad 200\sin^{99}2x\ \cdot\cos 2x$$

(5)

$$\big(x^3\log(2x^3+x)\big)' \quad = \quad 3x^2\log(2x^3+x)+x^3\frac{6x^2+1}{2x^3+x}$$

(6)

$$\big(\arcsin(x^2+1)\big)' \quad = \quad \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$$

(7)

$$\begin{aligned}\big((x^2+2)(x^2+3)\big)' \quad &= \quad (x^2+2)'(x^2+3)+(x^2+2)(x^2+3)' \\ &= \quad 2x(x^2+3)+2x(x^2+2)=2x(2x^2+5)\end{aligned}$$

(8)

$$\big(\sin(3x+1)\big)' \quad = \quad 3\cos(3x+1)$$

(9)

$$\big(e^x\sin x\big)' \quad = \quad e^x\sin x+e^x\cos x$$

(10)

$$\begin{aligned}(x\arctan x)' &= (x)'\arctan x+x\,(\arctan x)' \\ &= \arctan x+\frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

演習問題 5.23 次を示せ。

$$y=\log|x|\ (x\neq 0)\ \text{とおくと}\ y'=\frac{1}{x}$$

$x>0$ のときはすでに示したように

$$\big(\log x\big)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

$x<0$ のとき，$|x|=-x$ なので，$u=-x$ とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned}\big(\log|x|\big)' &= \frac{d\log(-x)}{dx} = \frac{d\log u}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u}(-1) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

いずれの場合も

$$\big(\log|x|\big)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.24　対数微分法を用いて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$

(1)　$y=x^{\sin x}$ の両辺の対数を取ると，$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x\log x + \sin x\frac{1}{x}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \sin x\frac{1}{x}\right)$$

が得られる。

(2)　$y=\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$ の両辺の対数を取ると，

$$\begin{aligned}\log y &= \log\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}} = \log\left(\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{2}\left\{\log(x^2+2)^2 - \log(x^2+3)^3\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\log(x^2+2) - \frac{1}{2}\cdot 3\log(x^2+3) = \log(x^2+2) - \frac{3}{2}\log(x^2+3)\end{aligned}$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}\left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}\right) \\ &= \frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} - \frac{3x(x^2+2)}{(x^2+3)^2\sqrt{x^2+3}}\end{aligned}$$

が得られる。