

## 数学序論に対する追加説明 #1

- 番号は指定された format で書くこと。
- 学籍番号の最後の桁を略した番号を記入すること。例えば学籍番号が 1712n0384x であれば最後の x を略して 1712n0384 になる。
- 文章を読んで、指定された format の通り書く能力を身につけることは非常に重要である。
- 今回から Format が正しくないものは未提出と見なす。
- 用紙は指定された場所に置くこと。指定は出席番号で指定してある。  
学籍番号が 1712n0099x の人は 1712n と x を略し、先頭に 0 が何個かある場合はそれらを省略した 99 を出席番号とする。学籍番号が 1712n8023x の場合略したものの先頭に 0 はつかないので 8023 になる。
- 指定された演習問題を解くこと。
- 真理値表について理解してないと思われる人が若干いる。この問題を演習時間に再度行なうことはしないが、各自しっかり理解しておくこと。
- 真理値表に関して再度説明しておく。  
真理値表は真偽のすべての場合を記述する欄とそれに対応して真偽が決まる欄からなる。真偽のすべての場合を記述する欄が縦にいくつの行が必要かということは論理式に含まれる命題の個数に依存する。  
(1)  $\neg(\neg P) \equiv P$  の場合論理式に含まれる命題の個数は 1 個なので行は 2 行である。  
(3)  $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$  の場合論理式に含まれる命題の個数は 2 個なので行は 4 行必要になる。  
(5)  $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$  の場合論理式に含まれる命題の個数は 3 個なので行は 8 行必要になる。  
一般に命題の個数が  $k$  個のとき行は  $2^k$  行必要になる。

$P$
T
F

$P$	$Q$
T	T
T	F
F	T
F	F

$P$	$Q$	$R$
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

この欄の右に真偽を記述するのに必要な欄を書いていく。

(9) の場合  $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$  なので  $\neg(P \wedge Q)$  および  $\neg P \vee \neg Q$  の欄は必要であるが、 $\neg(P \wedge Q)$  を記述するためには  $P \wedge Q$  の欄が、 $\neg P \vee \neg Q$  の欄を記述する為に  $\neg P$  と  $\neg Q$  の欄が必要である。よって真理値表は次のようになる。

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

- 解答の書き方について：解答は他人が読んで理解可能なように書く必要がある。書く途中および書上げたら、「他人の目」で推敲して、他人が読んで分かるかをチェックすること。特に高校でそのような訓練をしていない人は最初は意識的に推敲をすること。
- $X$  と  $Y$  が同値とは「 $X \implies Y$  が真かつ  $Y \implies X$  が真」ということなので、それを証明すればよい訳である。
- ここでは対偶 (contraposition) を例に解説する。 $P \implies Q$  を  $X$ ,  $\neg Q \implies \neg P$  を  $Y$  とする。とする。 $Y$  は  $X$  の対偶である。これらが同値であることを示す。真理値表を書くと次のようになる。

$P$	$Q$	$P \implies Q$ [ $X$ ]	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$ [ $Y$ ]	$X \implies Y$	$X \iff Y$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

- この真理値表であれば，示すべきこと ( $X \implies Y$  および  $Y \implies X$  が恒真命題であること) が真理値表の欄に書かれているので，何か説明が書いてなくても，これを読む人は理解できるであろう。
- しかし次のようなやり方の場合真理値表だけでは不十分である。

$P$	$Q$	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

- 証明すべきことは  $X \implies Y$  および  $X \iff Y$  が真であることである。

しかし，今の場合真理値表にはそのことは書かれていない。真理値表からどうして同値と分かるのか，理由を理解しているかが読む人に分かるように書かれていなければ証明とはいえない。

- この真理値表に加えて「 $X (P \implies Q)$  と  $Y (\neg Q \implies \neg P)$  の対応する欄の真偽が一致しているので同値である。」と書くのは1つの解答例であろう。

解説を載せたのでそれを参考に (勿論解説と同じでなければならぬということはない)。

- 「よって同値である」だけの説明もどうして「よって」なのか分からない。
- 「真理値表より同値であることが分かる」も前項とほとんど同じでダメ。理由を書くこと。