数学序論に対する追加説明 ♯2

- 番号は format に基づいて正確に書くこと。
  番号が正しく書かれていないものは未提出とみなしている。

- 学籍番号が **1712n0400x** であれば最後の **x** を略して **1712n0400** になる。

- **再履修の人は昨年度と異なっているので，間違えないように。**

- 用紙を置く場所を間違えないこと。
  置く場所の指定は **1〜30** の様になっているが，先ほどの番号から **1712n** を除いたものを数字と見て，そこに置くこと。

  置く場所を間違えた解答は未提出とみなす。

- 演習問題で「真偽を判定せよ」とあるとき，これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく,「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが**必ず**必要である。**これからの演習問題も常にそういう意味だと理解すること**。

  結論だけ書いてある答案は，仮に結論があっていてもテストのように採点をすれば 0 点である。

- 「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$」を例にとる。

  問題は否定命題をつくり，(元の) 命題の真偽を判定するものである。

- 否定命題はだいたいの人ができていた。問題は真偽の判定である。

- 「真である。」とだけ書いてある答案は，結論はあっていても，0 点である。

- 「$x^4 + 3x^2 + 2$ は必ず 0 以上になるので真である」というのは理由にはならない。

  P という命題を証明するのに「P が正しいので P が示された。」と書いてあるのと同じである。

- 「x にどのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」というのもダメである。

「どのような数をいれても」と書いてあるが，実数は無限集合なので，このことを実際に行うことは不可能である。

実行不可能なことを根拠にすることはできない。

- 元の命題か否定命題のどちらかの真偽を判定すればよいのだが,「任意」と「存在」では同じではない。

  否定命題「$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 + 3x^2 + 2 < 0$」が真であることを示すにはそうなる x を 1 つ見つければよい。(実際には存在しないが)

  元の命題「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$」が真であることを示すためには，1 つ見つけるだけではダメで，すべての実数に対して成立することを示す必要がある。

- 任意 ($\forall$) と存在 ($\exists$) の非対称性に注意すること。

- 演習問題 1.10 に関して解説する。

- 「解析」と「叙述」の区別がついていない人がいるが，その様な人は要綱をもう一度読み返すこと。

- 解析は正しくしているのだが，そこから「方程式が解けないので生成しない」,「解を持つので生成する」等書いている人がいたが，これでは証明になっていない。

- 「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成する」ことの定義は

  $$\boxed{\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \ \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2}$$

  であり,「生成しない」ことの定義は

  $$\boxed{\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \ \boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2}$$

  である。

- 生成またはその否定を示すためには，このどちらかを示す必要がある。

- たとえば $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき，解析でベクトル

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$x = 2a_1 + 4a_2, \quad y = 3a_1 + 6a_2 \tag{1}$$

が分かったとしても,「方程式が解けないので生成しない」ではダメである。

- 条件を満たすベクトルを 1 つ見つけることが必要である。(1) が成立するとき $3x = 2y$ となるので，それを満たさないベクトルを指定すればよい。

  例えば $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定すると,

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  を満たす実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

  $$3 = 3 \cdot 1 = 3(2a_1 + 4a_2) = 2(3a_1 + 6a_2) = 2 \cdot 0 = 0$$

  となり矛盾，よって $\mathbb{R}^2$ を生成しない。